

EM 2 : Conduction électrique et magnétostatique

I. Courant électrique

1. Vecteur densité de courant

Déf : Pour définir le vecteur **densité de courant électrique** $\vec{j}_e(M, t)$ décrivant le phénomène de transport de charge, on considère une surface élémentaire dS centrée en M de normale \vec{n} donc $d\vec{S} = dS \vec{n}$ et des porteurs de charge mobile de vitesse moyenne $\vec{v}(M, t)$. La densité volumique de charge due à ces porteurs est $\rho(M, t)$.

La charge traversant dS entre t et $t + dt$ est $d^2q(M, t)$, elle correspond à la charge contenue à l'instant t dans le cylindre de longueur $v \cdot dt$, de volume $d^2V = d\vec{S} \cdot \vec{v} dt = dS \cdot v \cdot dt \cos \theta$, alors :

$$d^2q(M, t) = \rho(M, t) d^2V = \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} dt = \vec{j}_e \cdot d\vec{S} dt \Rightarrow \boxed{\vec{j}_e = \rho \vec{v}} \text{ en } A \cdot m^{-2}$$

Dans le cas où il y a plusieurs types de porteurs de charge, on a : $\vec{j}_e(M, t) = \sum_i [\rho_i \vec{v}_i](M, t)$ (exemple des électrolytes)

2. Intensité traversant une surface

Prenons une surface orientée S , la charge traversant S entre t et $t + dt$ est : $dq = \iint_S \vec{j}_e \cdot d\vec{S} \cdot dt$ d'où :

$$I = \frac{dq}{dt} = \iint_S \vec{j}_e \cdot d\vec{S}$$

I est l'**intensité** traversant S est le flux du vecteur densité de courant à travers cette surface.

II. Loi d'Ohm

1. Conductivité statique

Modèle de Drude

Pour décrire un conducteur électrique fixe, considérons un électron libre P (de conduction) soumis à un champ électrique constant, on modélise la résistance électrique par une force de frottement visqueux

$$\vec{f} = -\frac{m}{\tau} \vec{v}(P)$$

où τ est une constante positive représentant le temps entre deux collisions dans le matériau. (effet de l'agitation thermique et des défauts cristallins) et $\vec{v}(P)$ représente la vitesse moyenne de l'électron en présence d'un champ \vec{E} statique.

En négligeant le poids et la force magnétique, la loi de la quantité de mouvement donne :

$$m\vec{a} = q\vec{E} + \vec{f} \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{1}{\tau} \vec{v} = -\frac{e}{m} \vec{E}$$

La solution de cette équation est : $\vec{v}(t) = \underbrace{\vec{V}_0}_{\text{vitesse initiale}} e^{-\frac{t}{\tau}} - \underbrace{\frac{e\tau}{m} \vec{E}}_{\text{vitesse limite}}$

Pour des électrons, de densité volumique n (en électron $\cdot m^{-3}$), le vecteur densité de courant s'écrit, après quelques τ :

$$\vec{j}_e = \rho \vec{v}_{\text{lim}} = -ne \vec{v}_{\text{lim}} = \frac{ne^2 \tau}{m} \vec{E}$$

La **conductivité électrique** statique γ (ou σ) du métal est définie par la **loi d'Ohm locale** : $\boxed{\vec{j}_e(M) = \gamma \vec{E}(M)}$ avec

$$\boxed{\gamma = \frac{ne^2 \tau}{m}} \text{ en } S \cdot m^{-1} = \Omega^{-1} \cdot m^{-1}$$

Exemple : Pour le cuivre $\gamma = 5,9 \cdot 10^7 S \cdot m^{-1}$; $n = 8,5 \cdot 10^{28} m^{-3}$; $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} kg$ d'où $\tau \approx 2,5 \cdot 10^{-14} s$.

En TP d'électronique, on a des fréquences $f < 10 MHz \Rightarrow T > 10^{-7} s$ l'Approximation du Régime Quasi-Stationnaire (ARQS) reste valide.

2. Conductivité en régime variable*

Considérons désormais que l'électron est soumis à un champ électromagnétique variable dont la composante magnétique est négligeable. On suppose \vec{E} sinusoïdal (décomposition de Fourier) et on étudie le problème en régime sinusoïdal forcé :

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t + \varphi_0) = \Re(\underline{\vec{E}}) \text{ avec } \underline{\vec{E}} = \vec{E}_0 e^{i\varphi_0} e^{i\omega t} = \underline{\vec{E}}_0 e^{i\omega t} \text{ et } \vec{v} = \Re(\underline{\vec{v}})$$

Après le régime transitoire, \vec{v} est de même fréquence que \vec{E} , donc $\underline{\vec{v}}(t) = \underline{\vec{v}}_0 e^{i\omega t}$, ainsi l'équation du mouvement est :

$$\tau \frac{d\underline{\vec{v}}}{dt} + \underline{\vec{v}} = -\frac{e\tau}{m} \underline{\vec{E}} \Rightarrow i\omega\tau \underline{\vec{v}} + \underline{\vec{v}} = -\frac{e\tau}{m} \underline{\vec{E}} \Rightarrow \underline{\vec{v}} = -\frac{e\tau}{m(1+i\omega\tau)} \underline{\vec{E}}$$

Et avec $\vec{j} = -ne\vec{v}$, on en déduit la **conductivité complexe** $\underline{\vec{j}} = \underline{\gamma} \underline{\vec{E}}$ avec
$$\underline{\gamma} = \frac{ne^2\tau}{m(1+i\omega\tau)}$$

3. Résistance électrique

On peut établir un lien entre les lois d'Ohm locale $\underline{\vec{j}} = \underline{\gamma} \underline{\vec{E}}$ et globale $U = RI$ pour un fil résistif parcouru par un courant de densité uniforme \vec{j} et soumis à une différence de potentiel $U = V(A_1) - V(A_2)$.

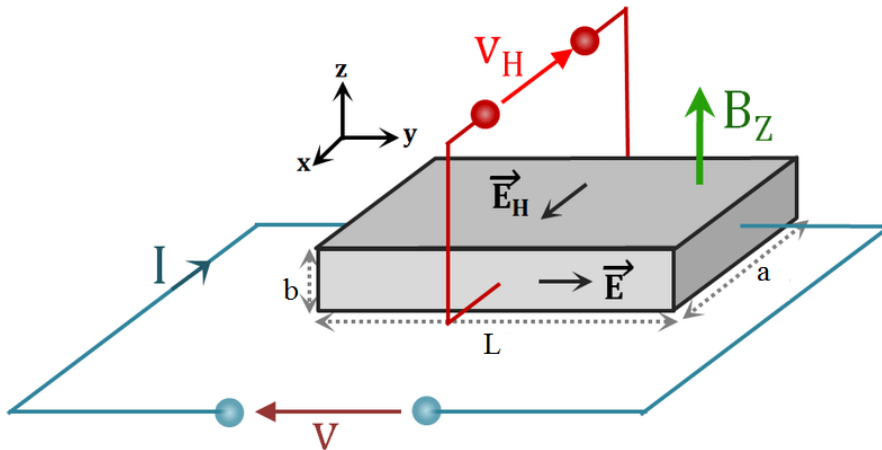
La résistance d'un conducteur filiforme de longueur ℓ , de section droite S est $R = \frac{\ell}{\gamma S}$ analogue à $R_{th} = \frac{\ell}{\lambda S}$.

A. N. Pour un fil de cuivre cylindrique de rayon $r = 1 \text{ mm}$ la résistance linéique $R_\ell = \frac{R}{\ell} = \frac{1}{\gamma S} \approx 5.10^{-3} \Omega \cdot \text{m}^{-1}$, elle est donc négligeable pour les petites longueurs.

III. Effet Hall

1. Description du phénomène

L'effet Hall a été découvert par Edwin H. Hall en 1879. On considère un ruban conducteur de largeur a , d'épaisseur b parcouru par un courant constant I et soumis à un champ \vec{B} perpendiculaire au ruban. Le courant I est dû au mouvement d'électron de charge $q = -e < 0$ et de vitesse \vec{v} .



Étude en régime transitoire

Une particule de charge q subit la force de Lorentz : $\vec{F}_{EM} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$, le champ \vec{B} entraîne donc une force magnétique $\vec{F}_{mag} = -e\vec{v} \wedge \vec{B}$ qui dévie les trajectoires des électrons qui s'accumulent d'un côté tandis qu'un déficit d'électron crée un potentiel positif de l'autre. De cette différence de potentiel naît un **champ électrique de Hall** \vec{E}_H .

Les électrons subissent désormais la force : $\vec{F}_{EM} = -e(\vec{E}_H + \vec{v} \wedge \vec{B})$ jusqu'à ce que l'accumulation de charge équilibre les forces.

Étude en régime établi

Une fois atteint l'équilibre, on $\vec{F}_{EM} = \vec{0} \Rightarrow \vec{E}_H = -\vec{v} \wedge \vec{B}$ les électrons ne sont plus déviés. On définit alors la **tension de Hall** : $\vec{E} = -\text{grad } V \Rightarrow V_H = \int -E_H dx = -E_H a$

2. Tension de Hall et teslamètre

À partir du courant, on a : $I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} = jS = jab = nqvab \Rightarrow v = \frac{I}{nqab}$

où n est la densité de porteur de charge, q la charge et $S = ab$

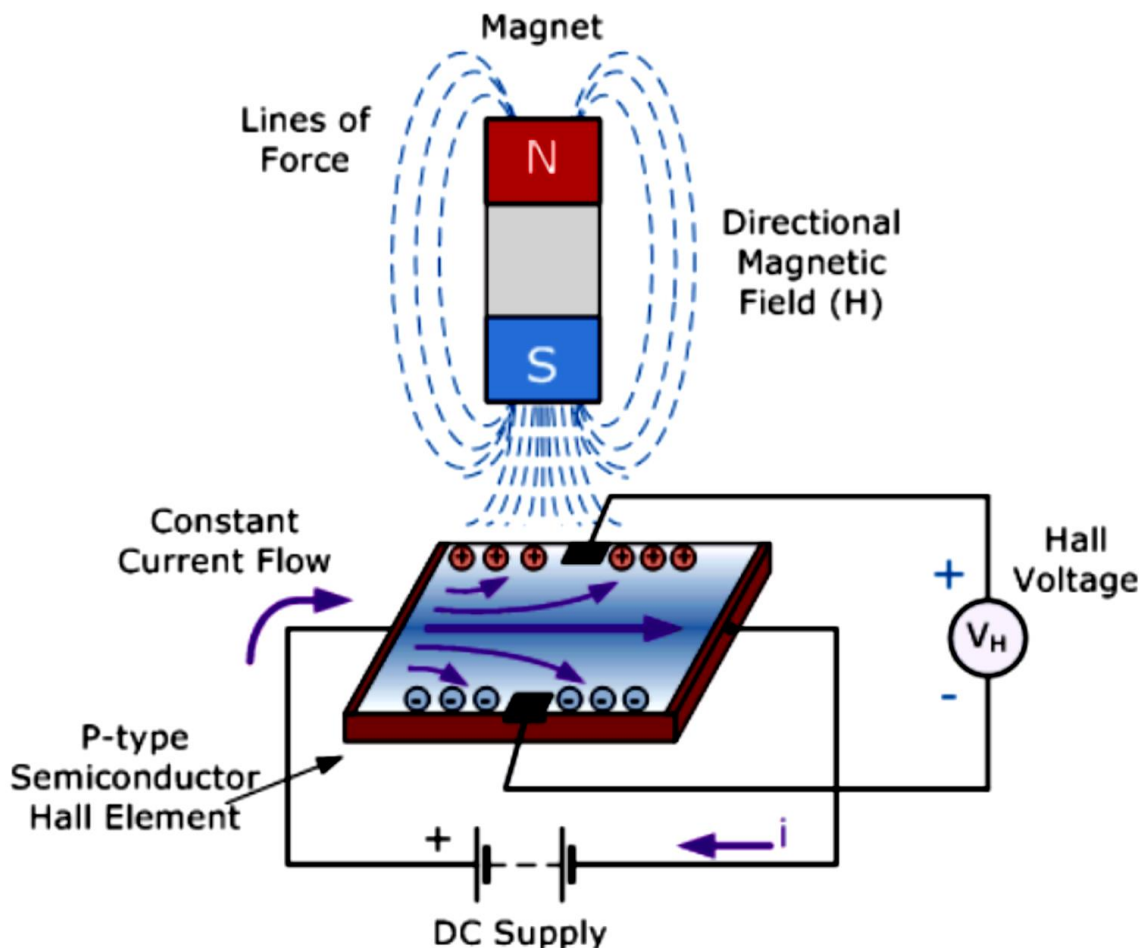
Le potentiel et le champ de Hall ($E_H = vB$) donne, en norme :

$$V_H = E_H a = vBa = \frac{1}{nq} \cdot \frac{IB}{b} = R_H \frac{IB}{b}$$

On note alors $R_H = \frac{1}{nq}$ la **constante de Hall** en $\text{m}^3 \cdot \text{C}^{-1}$, son signe dépend du signe de la charge q .

Pour le cuivre, $R_H^{exp} = -0,6 \cdot 10^{-10} \text{m}^3 \cdot \text{C}^{-1}$

Le potentiel de Hall est proportionnel au champ magnétique B , cela permet de mettre en place un teslamètre par sonde à effet Hall.



Pour du cuivre, avec $b = 0,1 \text{ mm}$; $I = 1 \text{ A}$; $B = 1 \text{ T}$ on obtient $V_H \approx 0,6 \mu\text{V}$ cette valeur est difficilement mesurable, on utilise donc une plaquette de semi-conducteur comportant moins de porteur de charge que dans un conducteur électrique.

IV. Propriétés globales du champ magnétostatique

1. Flux du champ magnétique

Le champ magnétostatique est un **champ à flux conservatif**, c'est-à-dire que son flux à travers toute surface fermée \mathcal{S} est nul :

$$\Phi_B = \oiint_{\mathcal{S}} \vec{B}(M) \cdot d\vec{S}_M = 0$$

2. Circulation du champ magnétique et théorème d'Ampère

Soit Γ un contour fermé orienté et \mathcal{S}_Γ une surface s'appuyant sur Γ .

Déf : la **circulation du champ magnétique** est défini par : $\mathcal{C}_B = \oint_{\Gamma} \vec{B}(P) \cdot d\vec{\ell}_P$

et le **courant enlacé** est le flux de la densité de courant sur la surface \mathcal{S}_Γ s'appuyant sur Γ : $I_e = \iint_{\mathcal{S}_\Gamma} \vec{j}(M) \cdot d\vec{S}_M$

en régime stationnaire, il ne dépend que du contour Γ et non de la surface \mathcal{S}_Γ . Ces deux grandeurs sont liées par :

$$\text{Théorème d'Ampère} \quad \mathcal{C}_B = \oint_{\Gamma} \vec{B}(P) \cdot d\vec{\ell}_P = \mu_0 I_e$$

où $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ est la perméabilité magnétique du vide

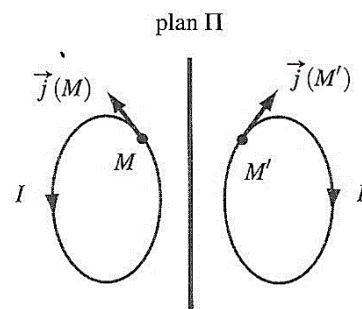
S'il y a plusieurs courants $I_e = \sum_{\kappa} \pm i_{\kappa}$, le signe \pm dépend du sens de parcours (règle du tire bouchon).

Ce théorème est l'analogie magnétique du théorème de Gauss électrostatique et permet le calcul du champ magnétique.

V. Symétries du champ magnétique

1. Symétrie plane

Déf : Considérons une distribution de courant (ou de charges mobiles) présentant un **plan de symétrie** des sources Π_S , alors pour point M de la distribution \mathcal{D} portant un courant $\vec{j}(M)$, il existe un point $M' \in \mathcal{D}$ symétrique de M portant un courant $\vec{j}(M')$ symétrique (même norme et vecteur direction symétrique).



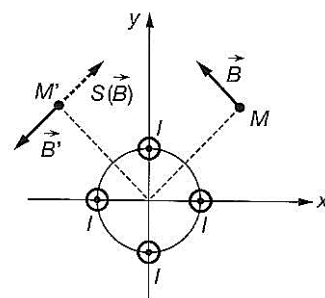
Pour connaître les conséquences d'une symétrie sur le champ \vec{B} , il faut appliquer les symétries à la composante magnétique de la force de Lorentz :

$$\vec{F}_{EM} = \rho \vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{j} \wedge \vec{B}$$

Les **vecteurs vraies** \vec{v}, \vec{j} et \vec{F} respectent les symétries alors le champ magnétique \vec{B} (de même que le moment cinétique \vec{L}) est un **vecteur axial** (ou pseudo-vecteur), en conséquence, son image par symétrie par rapport à un plan Π_S est antisymétrique, c'est-à-dire que l'image de \vec{B} est l'opposé du symétrique d'un vecteur de même direction.

Exemple : on considère 4 fils infinis selon l'axe z , les plans de symétrie sont $(Oxz), (Oyz)$ et les plans bissecteurs.

On note $M(x, y, z)$ et son symétrique $M'(-x, y, z)$ par rapport à (Oyz) , pour avoir \vec{F} et \vec{F}' symétriques avec \vec{v} et \vec{v}' (ou \vec{j} et \vec{j}') symétrique, il faut qu'il y ait une antisymétrie entre $\vec{B}(M)$ et $\vec{B}(M')$.



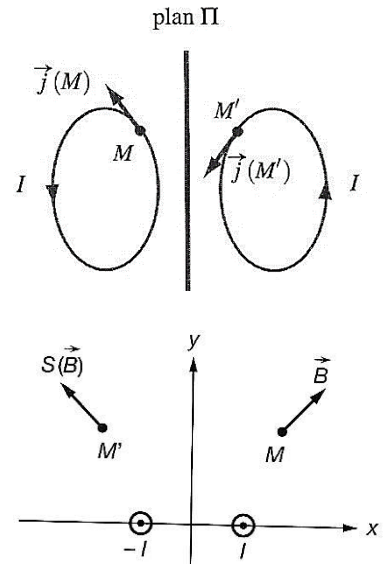
De plus, pour tout point $M \in \Pi_S$, le champ magnétique $\vec{B}(M)$ est orthogonal au plan Π_S :
 $M \in \Pi_S \Rightarrow \vec{B}(M) \perp \Pi_S$

2. Antisymétrie plane

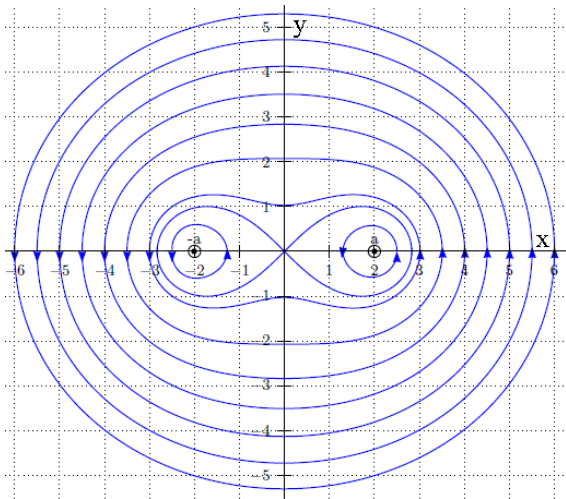
Déf : Considérons une distribution de courant présentant un **plan d'antisymétrie** des sources $\Pi_{\mathcal{A}}$, alors pour point M de la distribution \mathcal{D} portant un courant $\vec{j}(M)$, il existe un point $M' \in \mathcal{D}$ symétrique de M portant une courant opposé $\vec{j}(M')$ (même norme et vecteur direction antisymétrique).

Exemples : dans le cas de deux fils parallèles à Oz parcourus par des courants opposés, le plan (Oyz) est un plan d'antisymétrie pour les sources \vec{j} et pour les forces \vec{F} donc l'image de $\vec{B}(M)$ en M' par antisymétrie plane est le symétrique du champ.

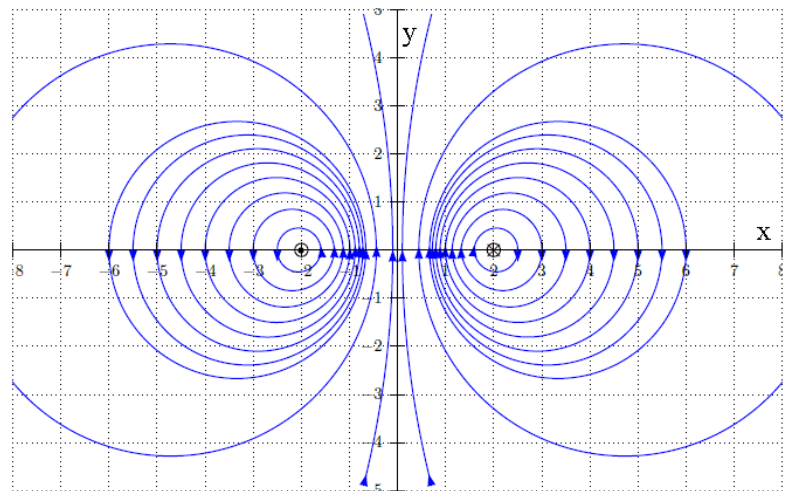
Si on reprend le cas précédent des 4 fils parallèles, le plan de la figure (Oxy) est un plan d'antisymétrie pour les courants car la direction de \vec{j} change de sens à la traversée du plan. On observe alors que **pour tout point $M \in \Pi_{\mathcal{A}}$, le champ magnétique $\vec{B}(M)$ appartient au plan $\Pi_{\mathcal{A}}$: $M \in \Pi_{\mathcal{A}} \Rightarrow \vec{B}(M) \in \Pi_{\mathcal{A}}$.**



3. Application : comparaison de deux distributions



(a) Lignes de champs pour deux fils parcourus par des courants de même sens



(b) Lignes de champs pour deux fils parcourus par des courants de sens opposé

(a) Dans le cas de deux fils parallèles parcourus par un même courant, le plan de la figure est un plan d'antisymétrie et les deux plans $x = 0$ et $y = 0$ sont des plans de symétrie pour la distribution de courant. On observe alors que les lignes de champ coupent les plans $\Pi_{\mathcal{S}}$ orthogonalement et qu'elles sont antisymétriques de part et d'autre du plan $\Pi_{\mathcal{S}}$.

(b) Dans le cas de deux fils parallèles parcourus par des courants opposés, le plan médiateur $(Oyz$ ou $x = 0$) est désormais un plan d'antisymétrie $\Pi_{\mathcal{A}}$ tout comme le plan de la figure. On observe alors que des lignes de champ appartiennent à ces plans et que la figure est symétrique par rapport à $\Pi_{\mathcal{A}}$. Les lignes de champ sont encore orthogonales au plan de symétrie $(Oxz$ ou $y = 0$) et antisymétriques de part et d'autre.

À cause du caractère conservatif du flux magnétique, **les lignes de champ ne peuvent diverger, elles sont fermées et entourent les sources**, à l'exception du cas de distribution infinie où elles se ferment à l'infini. Elles sont orientées d'après la règle de la main droite (ou du tire-bouchon).

Le long d'une ligne de champ, **la norme du champ magnétique décroît quand les lignes de champ voisines s'écartent, elle augmente au contraire si les lignes se rapprochent.**

VI. Distributions à haut degré de symétrie

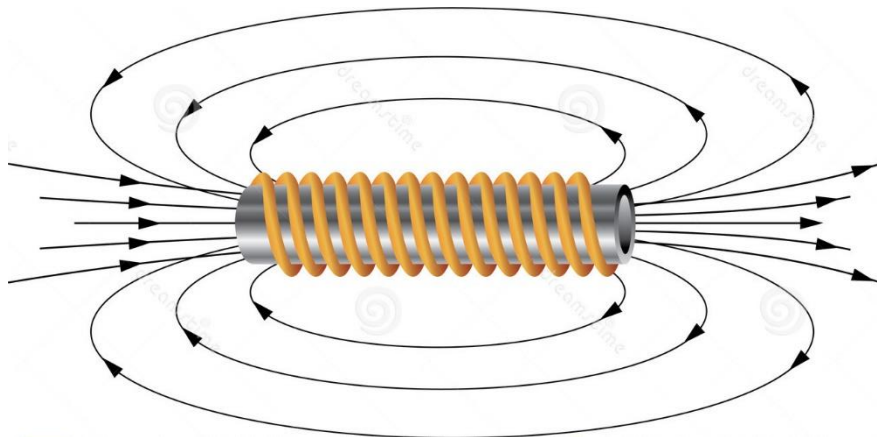
1. Méthode d'étude

Grâce aux symétries de la distribution, il est souvent possible de déterminer, a priori, la direction de \vec{B} et les variables associées. Il faut ensuite appliquer le théorème d'Ampère sur un contour judicieusement choisi afin de faciliter le calcul de la circulation \mathcal{C}_B (en général, une ligne de champ) et passant par le point M dont on veut déduire $\vec{B}(M)$.

2. Fil rectiligne infini

3. Modèle du fil cylindrique

4. Modèle du solénoïde infini



1 Champ magnétostatique	
Équations locales de la magnétostatique et formes intégrales : flux conservatif et théorème d'Ampère. Linéarité des équations.	Choisir un contour, une surface et les orienter pour appliquer le théorème d'Ampère. Utiliser une méthode de superposition.
Propriétés de symétrie. Propriétés topographiques.	Exploiter les propriétés de symétrie des sources (rotation, symétrie plane, conjugaison de charges) pour prévoir des propriétés du champ créé. Justifier qu'une carte de lignes de champs puisse ou non être celle d'un champ magnétostatique ; repérer d'éventuelles sources du champ et leur signe/sens. Associer l'évolution de la norme de \mathbf{B} à l'évasement des tubes de champ.
2 Exemples de champs magnétostatiques	
Câble rectiligne « infini ». Limite du fil rectiligne infini.	Déterminer le champ créé par un câble rectiligne infini. Calculer et connaître le champ créé par un fil rectiligne infini. Utiliser ces modèles près d'un circuit filiforme réel.
Solénoïde long sans effets de bords. Inductance propre. Densité volumique d'énergie magnétique.	Calculer et connaître le champ à l'intérieur, la nullité du champ extérieur étant admise. Établir les expressions de l'inductance propre et de l'énergie d'une bobine modélisée par un solénoïde. Associer cette énergie à une densité d'énergie volumique.

Démonstrations et notions à maîtriser :

- Établir la conductivité électrique dans le cadre du modèle de Drude
- Loi d'Ohm locale et globale
- Caractère conservatif du flux de champ magnétique
- Théorème d'Ampère et application à des exemples simples
- Définition de l'inductance magnétique L