

# EM 3 : Distributions dipolaires

## I. Dipôle électrostatique

L'étude du dipôle électrostatique, ensemble de deux charges électriques opposées à une grande importance, notamment en chimie où ce modèle permet d'expliquer les interactions à l'échelle microscopique. Ce modèle est adapté à la description de molécule polaire telle que HCl ou H<sub>2</sub>O, il permettra aussi d'expliquer le fonctionnement d'une antenne.

### 1. Distribution de deux charges opposées

Nous allons décrire un système de charge de somme nulle formé d'une charge positive  $+q$  en  $P$  et négative  $-q$  en  $N$ .

Pour caractériser le champ, on passera par le potentiel électrostatique et le principe de superposition :

$$V(M) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 NM} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 PM}$$

On cherche à évaluer le potentiel puis le champ à grande distance donc pour  $r = OM \gg a = NP$ , où  $O$  est le barycentre des charges. On se place en coordonnées sphériques centré en  $O$  avec l'axe  $(Oz)$  confondu avec l'axe du dipôle  $NP$ . Les charges sont invariantes par rotation autour de l'axe  $(Oz)$  donc le potentiel est indépendant de  $\varphi$ , ainsi  $V(M) = V(r, \theta)$  et  $\vec{E}(M) = \vec{E}(r, \theta)$ . Tout plan contenant  $M$  et  $(Oz)$  est un plan de symétrie des charges ( $M, \vec{u}_r, \vec{u}_z$ ) donc  $E_\varphi = 0$ , de plus, le plan passant par  $O$  est orthogonal à  $(Oz)$  est un plan d'antisymétrie (médiateur) donc  $E_r(r, \theta = \pm\pi/2) = 0$ .

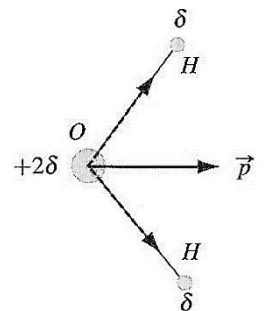
### 2. Potentiel à grande distance du dipôle

On pose  $\vec{p}$  le **moment dipolaire électrique** en C. m tel que  $\vec{p} = q \overline{NP}$

À l'échelle moléculaire, on l'exprime plutôt en debye :  $1 \text{ D} = 3,33 \cdot 10^{-30} \text{ C. m}$ .

On peut démontrer (à *savoir faire*) qu'au premier ordre, on a le potentiel :

$$V(M) = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{\vec{p} \cdot \overline{OM}}{4\pi\epsilon_0 OM^3}$$



(La notation en coordonnées intrinsèques ne dépend que de  $O$  et  $M$  et permet de superposer l'action de plusieurs dipôles d'indice  $i$ , centrés en  $O_i$  de moment dipolaire  $\vec{p}_i$ )

Le **potentiel créé par un dipôle décroît en  $1/r^2$**  et non en  $1/r$  comme une charge ponctuelle.

### 3. Champ créé à grande distance

À partir de  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$ , on en déduit :  $\vec{E}(r, \theta) = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + 0 \vec{u}_\varphi$  alors :

$$\vec{E}(r, \theta) = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{u}_r + \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{u}_\theta$$

Le **champ électrique créé par un dipôle décroît en  $1/r^3$**  et non en  $1/r^2$  comme une charge ponctuelle.

Pour l'expression en coordonnées intrinsèques, on utilise :

$\overline{(OM)} = \vec{r}$ ,  $OM = r$ ,  $\vec{p} = p \cos \theta \vec{u}_r - p \sin \theta \vec{u}_\theta \Rightarrow \vec{p} \cdot \overline{OM} = p r \cos \theta$  d'où

$$\vec{E}(M) = \frac{3(\vec{p} \cdot \overline{OM}) \overline{OM} - OM^2 \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 OM^5}$$

#### 4. Topologie du champ

On retrouve la décroissance du champ en s'éloignant du centre, le plan médiateur en  $\theta = \pm\pi/2$  est un plan d'antisymétrie alors que les plans contenant l'axe du dipôle (dont celui de la figure) sont des plans de symétrie.

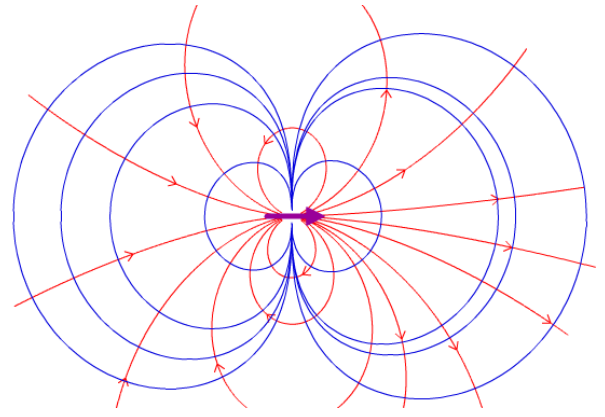
Dans un plan de symétrie  $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ , on peut raisonner en coordonnées polaires  $(r, \theta)$ , indépendamment de  $\varphi$ , les équations des lignes de champs sont données par la colinéarité de  $\vec{E}$  et  $d\vec{\ell} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta$ , donc :

$$\begin{aligned} - \text{nullité du déterminant} : & \quad \begin{vmatrix} E_r & dr \\ E_\theta & r d\theta \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow E_r r d\theta - E_\theta dr = 0 \\ - \text{nullité du produit vectoriel} : & \quad \vec{E} \wedge d\vec{\ell} = \vec{0} \Leftrightarrow (E_r r d\theta - E_\theta dr) \vec{u}_z = \vec{0} \end{aligned}$$

En simplifiant les termes communs, il vient :

$$2 \cos \theta r d\theta = \sin \theta dr \Rightarrow \frac{dr}{r} = \frac{2 \cos \theta}{\sin \theta} d\theta \text{ et par intégration : } \ln(r) = 2 \ln(\sin \theta) + \text{cte} = \ln(R_e \sin^2 \theta)$$

D'où  $r(\theta) = R_e \sin^2 \theta$  en notant  $R_e$  la constante telle que  $r(\pm\pi/2) = R_e$  pour le rayon équatorial.



## II. Actions d'un champ extérieur sur un dipôle électrique

On considère un dipôle de moment  $\vec{p} = q \overrightarrow{NP}$  plongé dans un champ électrique extérieur  $\vec{E}^{ext}$  engendré par d'autres charges que le dipôle. La résultante des forces et le moment en  $C$  sur le dipôle s'écrivent :

$$\vec{F}_E = q \vec{E}^{ext}(P) - q \vec{E}^{ext}(N) \text{ et } \vec{M}_C = q \overrightarrow{CP} \wedge \vec{E}^{ext}(P) - q \overrightarrow{CN} \wedge \vec{E}^{ext}(N)$$

### 1. Champ uniforme

#### Force

Pour un champ uniforme  $\forall M : \vec{E}^{ext}(M) = \vec{E}_0$  alors  $\vec{E}^{ext}(P) = \vec{E}^{ext}(N) = \vec{E}_0$  d'où  $\vec{F}_E = \vec{0}$

**La résultante des forces électriques sur un dipôle dans un champ extérieur uniforme est nulle**, il n'y a donc pas de translation de son centre de gravité.

#### Moment

Le moment s'écrit alors :  $\vec{M}_C = q (\overrightarrow{CP} - \overrightarrow{CN}) \wedge \vec{E}_0 = q \overrightarrow{NP} \wedge \vec{E}_0 = \vec{p} \wedge \vec{E}_0$ .

On note, en général, le moment d'un couple de force  $\vec{\Gamma}$ .

**Le moment subit par le dipôle dans un champ uniforme est  $\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}_0$** , il est indépendant du point où il est calculé et s'annule si le champ et le moment dipolaire sont colinéaires.

#### Action du champ

Notons  $\theta$  l'angle entre  $\vec{p}$  et  $\vec{E}$  alors  $|\vec{\Gamma}| = p E_0 \sin \theta$ . Les positions d'équilibre sont données par  $\theta = 0$  ou  $\theta = \pi$  :

- pour  $\theta \approx 0$ , les forces sur les deux charges tendent à ramener le dipôle dans la position d'équilibre  $\theta = 0$  donc la **position  $\theta = 0$  est stable**

- pour  $\theta \approx \pi$ , les forces tendent à éloigner le dipôle de sa position donc la **position  $\theta = \pi$  est instable**

**Un champ électrostatique tend à orienter le dipôle selon les lignes de champ électrique, cet effet permet d'expliquer la solvatation d'ion en solution aqueuse.**

### 2. Champ non uniforme

On peut démontrer que pour un champ non uniforme, on a :  $\vec{F}_E = (\vec{p} \cdot \text{grad}) \vec{E}^{ext}$

Et pour un dipôle rigide,  $\vec{p} = \overline{ct\vec{e}}$  d'où on simplifie l'expression en  $\boxed{\vec{F}_E = \overline{\text{grad}}(\vec{p} \cdot \vec{E}^{ext})}$

Pour le moment de force, l'effet prépondérant reste analogue au cas du champ uniforme.

### 3. Énergie potentielle d'un dipôle dans un champ extérieur

#### Énergie potentielle

Pour une charge  $q$  en électrostatique, on a  $\mathcal{E}_{pe} = qV^{ext}$  d'où pour un dipôle, la somme des énergies potentielles est :

$$\mathcal{E}_{pe} = qV^{ext}(P) - qV^{ext}(N)$$

En supposant les dimensions du dipôle faibles devant les dimensions caractéristiques de variation du champ (longueur d'onde  $\lambda \gg a$ ), on a, pour  $O$  le centre du dipôle :

$$V(P) - V(N) = \int_N^P dV = \int_N^P \overline{\text{grad}} V \cdot d\vec{\ell} \approx \overline{\text{grad}} V(O) \cdot \overline{NP} \approx -\vec{E}^{ext}(O) \cdot \overline{NP}$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}_{pe} = -\vec{E}^{ext}(O) \cdot q\overline{NP} = -\vec{p} \cdot \vec{E}^{ext}(O)$$

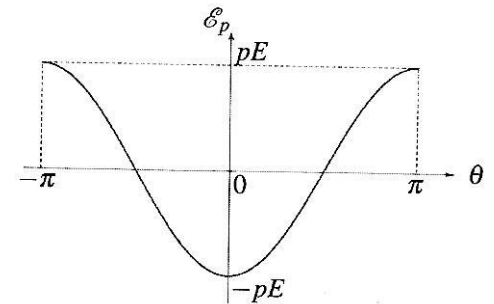
L'énergie potentielle d'un dipôle rigide dans un champ extérieur est  $\boxed{\mathcal{E}_{pe} = -\vec{p} \cdot \vec{E}^{ext}}$

On retrouve alors bien  $\boxed{\vec{F}_E = -\overline{\text{grad}} \mathcal{E}_{pe}}$  si  $\vec{p} = \overline{ct\vec{e}}$

#### Retour sur les positions d'équilibre

Revenons sur l'étude de l'équilibre de rotation d'un dipôle dans un champ extérieur.

On a  $\mathcal{E}_{pe} = -\vec{p} \cdot \vec{E}^{ext} = -pE^{ext} \cos \theta$  la position  $\theta = 0$  correspond au minimum d'énergie potentielle donc à un équilibre stable et la position  $\theta = \pi$  correspond à un maximum d'énergie donc à une position d'équilibre instable.



$$\text{de même } \left. \frac{\partial^2 \mathcal{E}^{ext}}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=0} = pE^{ext} \cos 0 > 0 \quad \text{et} \quad \left. \frac{\partial^2 \mathcal{E}^{ext}}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=\pi} = pE^{ext} \cos \pi < 0$$

### 4. Dipôles induits

#### Polarisabilité

Lorsqu'un atome ou une molécule non polaire (pas de moment dipolaire permanent) est plongé dans un champ extérieur, supposé faible, il acquiert un moment dipolaire induit proportionnel au champ appliqué :

$$\boxed{\vec{p}_{\text{induit}} = \alpha \epsilon_0 \vec{E}^{ext}} \quad \text{avec } \alpha > 0, \text{ la polarisabilité}$$

$$\text{Par analyse dimensionnelle, si } E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \Rightarrow [\alpha] = \frac{[p]}{[\epsilon_0 E]} = \frac{[qa]}{\left[\frac{q}{a^2}\right]} = [a^3]$$

La polarisabilité d'une molécule est égale, en ordre de grandeur à son volume.

#### Modèle de Thomson

Avant qu'E. Rutherford (*PN 1908*) n'observe que la taille du noyau atomique ( $\sim 10^{-15} \text{ m} = 1 \text{ fm}$ ) est faible devant celle de l'atome ( $\sim 10^{-10} \text{ m} = 1 \text{ \AA} = 100 \text{ pm}$ ), Thomson avait proposé un modèle d'atome d'hydrogène où la charge  $+e$  du proton serait répartie uniformément dans une boule de rayon  $a$  (dimension de l'atome), l'électron étant ponctuel.

On peut montrer que, en ordre de grandeur, la polarisabilité avec ce modèle est  $\alpha = 4\pi a^3$ .

#### Énergie potentielle d'une molécule polarisable

Pour une molécule polarisable dans un champ extérieur,  $\mathcal{E}_{pe} = -\vec{p} \cdot \vec{E}^{ext}$  n'est plus valable car le moment dipolaire est variable, reprenons l'expression de la force :

$$\vec{F}_E = (\vec{p} \cdot \text{grad}) \vec{E}^{ext} = \alpha \epsilon_0 (\vec{E}^{ext} \cdot \text{grad}) \vec{E}^{ext}$$

Or par analyse vectorielle :

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} (\vec{A} \cdot \vec{B}) \Rightarrow \vec{C} (\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C} + (\vec{B} \wedge \vec{C}) \wedge \vec{A}$$

et avec  $\vec{B} = \vec{v}$  et  $\vec{C} = \vec{A}$

$$\Rightarrow (\vec{A} \cdot \vec{v}) \vec{A} = \vec{v} (\vec{A} \cdot \vec{A}) + (\vec{v} \wedge \vec{A}) \wedge \vec{A} \Rightarrow (\vec{A} \cdot \text{grad}) \vec{A} = \frac{1}{2} \text{grad} (\|\vec{A}\|^2) + (\text{rot } \vec{A}) \wedge \vec{A}$$

D'où, comme  $\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$  en régime stationnaire (cf. chapitre suivant), on a :

$$\vec{F}_E = \alpha \epsilon_0 \text{grad} \left( \frac{E_{ext}^2}{2} \right) = -\text{grad } \mathcal{E}_{pe} \Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_{pe} = -\frac{\alpha \epsilon_0}{2} E_{ext}^2} \quad (\text{pas à savoir})$$

### 5. Forces intermoléculaires de Van der Waals

On appelle force de Van der Waals, les forces d'interaction dipôle-dipôle (Debye, London, Keesom), elles sont attractives et ont expérimentalement une énergie de la forme de :

$$\mathcal{E}_{vdw} = \frac{a}{r^{12}} - \frac{b}{r^6}$$

Si les dipôles s'interpénètrent, il apparait une contribution répulsive d'origine quantique.

Pour un dipôle permanent agissant sur un dipôle induit, on a :

$$\mathcal{E}_{induit} = -\frac{\alpha \epsilon_0}{2} E_{perm}^2 \quad \text{avec } E_{perm}^2 = E_r^2 + E_\theta^2 = \frac{p^2}{(4\pi \epsilon_0 r^3)^2} (4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta)$$

D'où en moyenne sur  $\theta$ , un terme en  $-r^{-6}$ .

Dans le cas de deux dipôles permanents, certaines orientations sont privilégiées (plus basse énergie) et on obtient aussi un terme en  $r^{-6}$ .

## III. Dipôle magnétique

### 1. Moment magnétique

En magnétostatique, la distribution de courant la plus simple est un fil parcouru par un courant. Cependant, pour assurer la conservation de la charge dans un fil avec un courant constant, il faut que le circuit soit fermé. On envisage donc une spire circulaire de rayon  $R$  de surface  $S$  parcourue par un courant  $I$ .

On définit alors le **moment magnétique**  $\boxed{\vec{m} = I\vec{S}}$  en  $A \cdot m^2$ , associé à la boucle plane de courant. On a donc :



$$\vec{m} = I\vec{S} = I\pi R^2 \vec{u}_z$$

Le moment magnétique  $\vec{m}$  caractérise la distribution de courant de même que le moment dipolaire électrique  $\vec{p} = q\vec{NP}$  caractérise le doublet de charge électrostatique.

L'orientation de la spire et la normale à la surface sont définies par la règle du tire-bouchon de Maxwell.

### Exemple : le modèle planétaire de l'atome

#### 2. Champ magnétique dipolaire

On considère un dipôle magnétique  $\vec{m} = m\vec{u}_z$

## Symétrie et invariance

En coordonnées sphériques, le dipôle est invariant par rotation autour de  $(Oz)$  et pour tout point  $M$ , le plan  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  contenant  $M$  et  $\vec{u}_z$  est un plan d'antisymétrie pour le courant donc de symétrie pour le champ  $\vec{B}$ . On a donc :

$$\vec{B}(M) = B_r(r, \theta)\vec{u}_r + B_\theta(r, \theta)\vec{u}_\theta \quad \text{ou simplement } B_\phi = 0$$

De plus, pour  $M$  sur l'axe  $(Oz)$ , cet axe est l'intersection de tous les plans d'antisymétrie du courant (de symétrie du champ) donc il porte  $\vec{B}$  :  $\vec{B}(M \in Oz) = B(r, \theta = 0[\pi])\vec{u}_z$ . Ainsi, l'axe  $(Oz)$  est une ligne de champ.

Le plan de la spire  $(xOy)$  est un plan de symétrie du courant donc pour  $M \in (xOy)$ ,  $\vec{B}$  est normal à ce plan :  $\vec{B}(M \in xOy) = B(r, \theta = \pi/2)\vec{u}_z$

## Champ dipolaire

Les propriétés du champ  $\vec{B}$  pour un dipôle magnétique sont analogues à celles du champ  $\vec{E}$  pour un dipôle électrostatique. Dans l'**approximation dipolaire**  $r \gg R$  (à grande distance), l'expression de  $\vec{B}$  se déduit par analogie en remplaçant  $1/\epsilon_0$  par  $\mu_0$  et  $\vec{p}$  par  $\vec{m}$ .

D'où pour un dipôle magnétique :

$$\vec{B}(r, \theta) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m \cos \theta}{r^3} \vec{u}_r + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin \theta}{r^3} \vec{u}_\theta$$

et en coordonnées intrinsèques :  $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{m} \cdot \overrightarrow{OM}) \overrightarrow{OM} - OM^2 \vec{m}}{OM^5}$

Les lignes de champs sont analogues à celles du dipôle électrique avec  $r = R_e \sin^2 \theta$ .

## Exemple : aimant permanent

Dans un aimant permanent, une interaction quantique entraîne un alignement des moments magnétiques. Pour estimer le moment magnétique volumique, on considère une distance de liaison métal-métal de  $a \sim 2.10^{-10}$  m alors la densité de moment magnétique est  $n \approx a^{-3} \approx 10^{29} \text{ m}^{-3}$  et le moment magnétique volumique est de :

$$\frac{d\mathcal{M}}{dV} \approx n\mu_B \approx 10^6 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$$

A. N. pour un aimant néodyme de  $1 \text{ cm}^3 = 10^{-6} \text{ m}^3$ , on a  $\mathcal{M} \approx 1 \text{ A} \cdot \text{m}^2$  et le courant équivalent  $I_{\text{eq}} \approx \frac{\mathcal{M}}{S} \approx 10^4 \text{ A}$

Pour évaluer la **force surfacique d'adhérence**  $\frac{dF}{dS}$ , on va utiliser l'énergie volumique  $\frac{d\mathcal{E}}{dV} = \frac{B^2}{2\mu_0}$

$$\left[ \frac{dF}{dS} \right] \approx \left[ \frac{d\mathcal{E}}{dV} \right] = \left[ \frac{B^2}{2\mu_0} \right] = \frac{1}{\mu_0} \left( \frac{\mu_0 m}{a^3} \right)^2 = \mu_0 \left( \frac{m}{a^3} \right)^2 \Rightarrow \frac{dF}{dS} \approx \mu_0 \left( \frac{d\mathcal{M}}{dV} \right)^2$$

A. N.  $\frac{dF}{dS} = 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2} = 1 \text{ bar}$

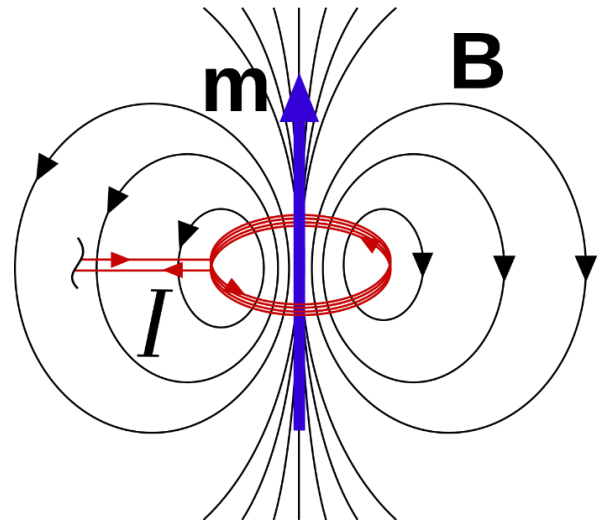
## 3. Actions d'un champ extérieur sur un dipôle magnétique

### Force et énergie potentielle

On considère un dipôle magnétique  $\vec{m}$  dans un champ extérieur  $\vec{B}^{\text{ext}}$ , il subit la force de Laplace  $d\vec{F}_L = Id\vec{\ell} \wedge \vec{B}^{\text{ext}}$

Pour obtenir l'énergie potentielle associée, il faut faire apparaître le flux magnétique  $\Phi_B = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}$ .

Considérons un élément de longueur  $d\vec{\ell}'$  orthogonal à  $d\vec{\ell}$  et à  $\vec{B}^{\text{ext}}$  (par exemple selon  $x$ ) alors (démonstration pas à savoir) :



Lignes de champs pour un dipôle magnétique

$$d^2W_{L,x} = d\vec{F}_L \cdot d\vec{\ell}' = dF_{L,x} = I \underbrace{(d\vec{\ell}' \wedge \vec{B}^{\text{ext}})}_{\text{produit mixte}} \cdot d\vec{\ell}' = I \vec{B}^{\text{ext}} \cdot \underbrace{(d\vec{\ell}' \wedge d\vec{\ell}')}_{d\vec{S}} = I \vec{B}^{\text{ext}} \cdot d^2\vec{S} = I d^2\Phi_B$$

On en déduit la force selon l'axe  $x$  :  $F_{L,x} = I \frac{d\Phi_B}{d\ell'}$ , et en généralisant pour toutes les directions :

$$\boxed{\vec{F}_L = \overrightarrow{\text{grad}}(I\Phi_B)}$$

On définit enfin l'énergie potentielle magnétique par :  $\vec{F}_m = -\overrightarrow{\text{grad}}(\mathcal{E}_{pm})$  d'où :

$$\mathcal{E}_{pm} = -I\Phi_B = -I \vec{B}^{\text{ext}} \cdot \vec{S} = -\vec{m} \cdot \vec{B}^{\text{ext}}$$

L'énergie potentielle magnétique d'un champ extérieur sur un dipôle  $\vec{m}$  est  $\mathcal{E}_{pm} = -\vec{m} \cdot \vec{B}^{\text{ext}}$  et  $\vec{F}_L = \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{m} \cdot \vec{B}^{\text{ext}})$

On retrouve l'analogie avec le cas électrique  $\mathcal{E}_{pe} = -\vec{p} \cdot \vec{E}^{\text{ext}}$

### Résultante et moment des forces

Par intégration de la force de Lorentz, avec un champ magnétique extérieur **uniforme**, on a  $\vec{B}^{\text{ext}} = \vec{B}_0 = \text{cte}$  et  $\vec{F}_L = \vec{0}$

Les moments des forces en  $O$ , le centre de la spire, engendre un couple de force de moment  $\boxed{\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}_0}$

Cette relation est généralisable au champ non uniforme si la distance  $\lambda$  caractéristique des variations du champ est grande devant la dimension du dipôle  $\boxed{\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}^{\text{ext}}}$

### Effet d'un champ sur un dipôle magnétique et position d'équilibre

En raison de l'analogie complète entre le dipôle électrique et magnétique, on observe un effet identique :

- Le champ magnétique tend à aligner les moments magnétiques dans le sens du champ avec un moment

$$\vec{\Gamma} = m B^{\text{ext}} \sin \theta \vec{u}$$

- La position  $\theta = 0$  correspond à un équilibre stable et à un minimum d'énergie potentielle :

$$\mathcal{E}_{pm}(\theta = 0) = -m B^{\text{ext}} \cos \theta = -m B^{\text{ext}} < 0$$

- La position  $\theta = \pi$  correspond à un équilibre instable et à un maximum d'énergie potentielle

$$\mathcal{E}_{pm}(\theta = \pi) = -m B^{\text{ext}} \cos \theta = m B^{\text{ext}} > 0$$

## 4. L'expérience de Stern et Gerlach

L'expérience de Stern et Gerlach (1921) est un exemple d'action d'un champ magnétique inhomogène  $\vec{B}^{\text{ext}}$  sur un atome modélisé par un dipôle de moment  $\vec{m} = \gamma \vec{L}$ . Elle est historiquement fondamentale car elle a permis de mettre en évidence la quantification du moment cinétique intrinsèque. Initialement, l'expérience avait pour but la mesure du moment magnétique  $\vec{m}$  d'un atome d'argent.

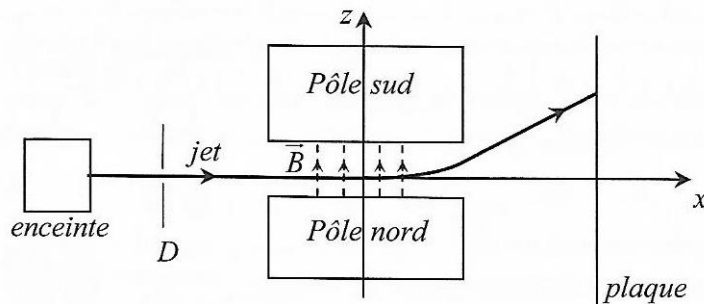


Figure 1

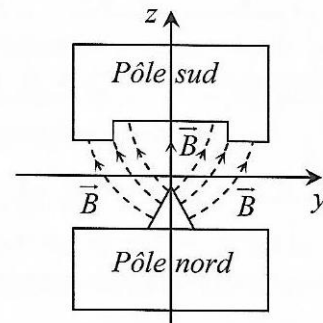


Figure 2

Dans cette expérience, un jet atomique est obtenu à la sortie d'un orifice dans une enceinte contenant de l'argent très pur chauffée à haute température. Il traverse ensuite un diaphragme  $D$  permettant d'obtenir un jet quasi monocinétique émergent (l'onde de de Broglie associée est alors monochromatique) et se propage dans un vide poussé (mPa) pour éviter les collisions avec l'air suivant l'axe  $Ox$ . En supposant que le jet est dans le plan  $y = 0$ , il traverse sur la zone

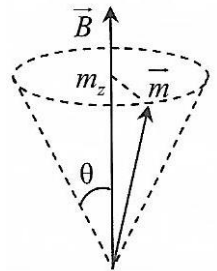
d'action d'un champ magnétique assimilable en première approximation à  $\vec{B} = B_z(z)\vec{u}_z$  et fortement inhomogène dans cette direction.

Considérons une modélisation semi-classique, comme l'atome est neutre, il ne subit pas la composante magnétique de la force de Lorentz ; ce n'est donc pas elle qui est responsable de la déviation du jet dans l'entrefer. Son numéro atomique est  $Z = 47$  donc la configuration électronique est  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10} 4p^6 5s^1 4d^{10} = [\text{Kr}]5s^1$ , l'atome a donc un moment magnétique auquel on peut associer la force  $\vec{F}_L = \text{grad}(\vec{m} \cdot \vec{B}^{\text{ext}})$  et le moment par rapport à la position de l'atome  $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}^{\text{ext}}$ . Ainsi, le théorème du moment cinétique appliqué au centre de l'atome donne :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Gamma} \Rightarrow \gamma \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{m}}{dt} = \gamma \vec{m} \wedge \vec{B}^{\text{ext}}$$

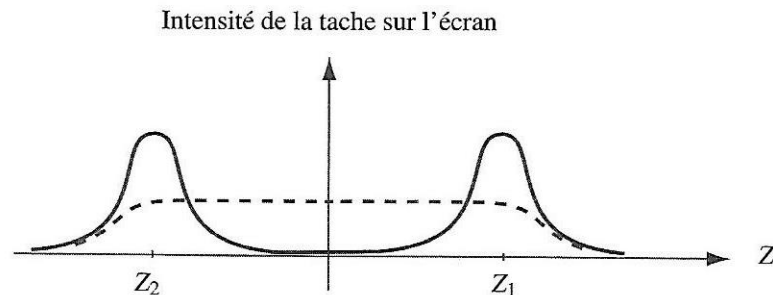
On en déduit :  $\vec{B}^{\text{ext}} \cdot \frac{d\vec{m}}{dt} = 0$  donc l'angle  $\theta$  entre les vecteurs  $\vec{B}^{\text{ext}}$  et  $\vec{m}$  reste constant.

Le moment magnétique décrit un cône d'axe  $\vec{B}^{\text{ext}}$ , ce moment tourne autour du champ magnétique avec la vitesse angulaire  $\Omega = \gamma B^{\text{ext}}$  (pulsation de Larmor). On appelle cela un mouvement de *précession*. Les composante du moment magnétique de l'atome  $m_x$  et  $m_y$  selon  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_y$  subissent une variation sinusoïdale très rapide au cours du temps et sont donc en moyenne nulles  $\langle m_x \rangle = \langle m_y \rangle = 0$ . Tout se passe donc comme si l'atome était soumis à la force verticale :



$$\vec{F}_{\text{mag}} = \text{grad}(\vec{m} \cdot \vec{B}^{\text{ext}}) \approx \langle m_z \rangle \frac{dB_z}{dz} \vec{u}_z$$

Pour un grand nombre d'atome passant par l'aimant, on s'attend à avoir  $m_z$  distribué aléatoirement entre deux bornes  $m_0$  et  $-m_0$  selon la valeur de  $\theta$ .



Taches observées sur l'écran. La courbe en tiretés représente la prévision classique, la courbe en traits pleins les taches réellement observées.

En réalité, on observe deux taches symétriques (en  $Z_1$  et  $Z_2$  sur l'écran), l'une correspondant à  $m_z = m_0$  et l'autre à  $m_z = -m_0$ . Aucune des valeurs intermédiaires que l'on attendrait classiquement du fait d'une hypothétique distribution aléatoire n'est observée. La projection suivant la direction du champ extérieur d'un moment magnétique atomique est donc quantifiée. L'approche classique ne permet pas d'expliquer ce résultat expérimental. C'est l'un des grand succès de la mécanique quantique d'y parvenir en introduisant le moment cinétique de **spin** de l'électron dont la projection suivant ( $Oz$ ) ne peut prendre que deux valeurs  $m_s = \pm \hbar/2$ .

[https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/transcoded/0/00/Spin\\_quantique\\_et\\_exp%C3%A9rience\\_de\\_Stern\\_et\\_Gerlach.ogv/Spin\\_quantique\\_et\\_exp%C3%A9rience\\_de\\_Stern\\_et\\_Gerlach.ogv.720p.vp9.webm](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/transcoded/0/00/Spin_quantique_et_exp%C3%A9rience_de_Stern_et_Gerlach.ogv/Spin_quantique_et_exp%C3%A9rience_de_Stern_et_Gerlach.ogv.720p.vp9.webm)

### Démonstrations et notions à maîtriser :

- Modèle du dipôle électrique et moment dipolaire
- Modèle du dipôle magnétique et moment magnétique