EM 4 : Équations de Maxwell et énergie du champ électromagnétique

À partir de ce chapitre, on sort du régime stationnaire et l'on considère que les champs dépendent, a priori, du point de l'espace et du temps $\vec{E}(M,t), \vec{B}(M,t)$. De plus, on prendra en compte les interactions entre les deux formes électrique et magnétique de l'électromagnétisme. Commençons par étudier les sources $\rho(M,t)$ et $\vec{j}(M,t)$ du champ électromagnétique.

I. Loi de conservation de la charge électrique

On observe expérimentalement que toute formation ou destruction de charge électrique par réaction chimique ou nucléaire respecte une conservation de la charge par formation ou destruction de charge opposée (oxydoréduction, radioactivité, …) Ainsi, la charge dans une surface fermée ne peut varier que par un courant de charge traversant la surface. Effectuons un bilan de charge pour exprimer cette loi de conservation.

1. Cas unidimensionnel

À partir d'un bilan de charge, on peut démontrer que :

$$\frac{\partial \rho}{\partial x}(x,t) + \frac{\partial j}{\partial x}(x,t) = 0$$

2. Cas général

En généralisant, on obtient l'**équation locale de conservation de la charge électrique :**

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t}(M,t) + \operatorname{div} \vec{j}(M,t) = 0}$$

II. Champ électromagnétique et équations de Maxwell

1. Définition du champ électromagnétique

Le champ électromagnétique est défini par son action sur une charge ponctuelle q.

Pour une charge q animée de la vitesse $\vec{v}_{/\mathcal{R}}$, on a la **force de Lorentz** : (le champ dépend du référentiel $\mathcal{R}$)

$$\boxed{\overrightarrow{F_{EM}} = q\left(\vec{E}_{/\mathcal{R}}(M,t) + \vec{v}_{/\mathcal{R}}(t) \wedge \vec{B}_{/\mathcal{R}}(M,t)\right)}$$

2. Équations de Maxwell

Le champ électromagnétique $(\vec{E}(M,t), \vec{B}(M,t))$ vérifie les quatre équations de Maxwell qui constituant le postulat de bas de l'électromagnétisme :

$$\boxed{\begin{array}{llll} \textbf{Maxwell Gauss} & \operatorname{div} \vec{E}(M,t) = \dfrac{\rho(M,t)}{\varepsilon_0} & \textbf{Maxwell Faraday} & \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{E}(M,t) = -\dfrac{\partial \vec{B}(M,t)}{\partial t} \\ \textbf{Maxwell Thomson} & \operatorname{div} \vec{B}(M,t) = 0 & \textbf{Maxwell Ampère} & \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{B}(M,t) = \mu_0\left(\vec{j}(M,t) + \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}(M,t)}{\partial t}\right) \end{array}}$$

$$\text{avec} \begin{cases} \text{la permittivité diélectrique du vide} & \varepsilon_0 \approx \dfrac{1}{36\pi} 10^{-9}\ \mathrm{F.m^{-1}} \\ \text{la perméabilité magnétique du vide} & \mu_0 = 4\pi.10^{-7}\ \mathrm{H.m^{-1}} \end{cases}$$

Ces constantes sont reliées entre elles par $\boxed{\mu_0 \varepsilon_0 c^2 = 1}$ en USI.

Vidéo pour les équations de Maxwell: https://www.youtube.com/watch?v=rB83DpBJQsE&t=1s

3. Compatibilité avec la loi de conservation de la charge

III. Formes intégrales des équations de Maxwell

À l'aide des théorèmes de Stokes et Ostrogradski, on peut démontrer les formes intégrales en régime variable des équations.

Théorèmes de Green-Ostrogradski $\vec{S}$ étant une surface fermée, orientée vers l'extérieur et τ le volume intérieur à S	$\oiint_S \vec{A}\,.\,d\vec{S} = \iiint_\tau (\mathrm{div}\,\vec{\mathrm{A}})d\tau$
Théorème de Stokes-Ampère C étant une courbe fermée, orientée (règle du tire-bouchon) et $\vec{S}$ la surface intérieure à C	$\oint_C \vec{A}.d\vec{\ell} = \iint_S (\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}).d\vec{S}$

1. Théorème de Gauss

Théorème de Gauss en régime quelconque :

$$\boxed{\Phi_E(t) = \oiint_\Sigma \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}(t)}{\varepsilon_0}}$$

2. Conservation du flux magnétique

Le champ magnétique est à flux conservatif : $\boxed{\Phi_B(t) = 0}$

3. Loi de Faraday

La circulation du champ électrique sur un contour est liée au flux magnétique par :

$$\boxed{\mathcal{C}_E(t) = -\frac{d\Phi_B(t)}{\partial t}}$$

4. Théorème d'Ampère généralisé

Le théorème d'Ampère généralisé :

$$\boxed{\mathcal{C}_B(t) = \oint_\Gamma \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enlacé}} + \mu_0\varepsilon_0\frac{d\Phi_E(t)}{dt}}$$

Par analogie avec la densité de courant $\vec{j}$, on note :

$\vec{J_d} = \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ la densité de **courant de d**é**palcement**

et $I_d = \varepsilon_0\frac{d\Phi_E}{dt}$ le **courant de d**é**placement** dû au variation du champ électrique dans le temps.

IV. Champs statiques

1.Équations de Maxwell en régime stationnaire

En régime stationnaire, le champ et les sources sont indépendantes di temps, les équations de Maxwell sont alors :

$$(\mathbf{M.G.})\quad \mathrm{div}\,\vec{E}(M) = \frac{\rho(M)}{\varepsilon_0} \qquad (\mathbf{M.F.})\quad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}(M) = \vec{0}$$

$$(\mathbf{M.T.})\quad \mathrm{div}\,\vec{B}(M) = 0 \qquad (\mathbf{M.A.})\quad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}(M) = \mu_0\vec{j}(M)$$

Dans ce cas, les champs électriques et magnétiques ne sont plus couplés, le champ électrique ne dépend que des charges ρ et le champ magnétique ne dépend que du courant $\vec{j}$. On traite alors séparément les deux champs, $\vec{E}$ dans le cadre de l'électrostatique avec le théorème de Gauss (et la loi de Coulomb) et $\vec{B}$ dans le cadre de la magnétostatique avec le théorème d'Ampère.

2. Potentiel électrostatique

En utilisant les propriétés d'analyse vectorielle, comme on a $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}(M) = \vec{0}$, on en déduit l'existence d'une fonction scalaire $M \longmapsto V(M)$ telle que $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V\right) = \vec{0}$.

Déf : On pose alors $\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V}$ avec V **le potentiel électrique** (le signe est conventionnel)

3. Équation de Poisson et équation de Laplace en électrostatique

En appliquant l'équation de Maxwell-Gauss au potentiel, on peut établir une relation entre le potentiel V et la charge :

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \mathrm{div}\left(-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{or } \mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}V\right) = \vec{\nabla}^2 V = \Delta V$$

d'où l'**équation de Poisson** : $\boxed{\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0}$

Dans une région de l'espace vide de charge, on a $\rho(M) = 0$, le potentiel vérifie alors l'**équation de Laplace :**

$$\boxed{\Delta V(M) = 0}$$

Cette équation à une grande importance physique car il s'agit d'une équation linéaire locale toujours vraie en l'absence de charge, en imposant le potentiel au niveau des charges surfaciques d'un condensateur, on peut résoudre l'équation de Laplace en tout point puis retrouver le champ $\vec{E}$.

V. Approximation des régimes quasi-stationnaires

1. Équations de propagation du champ dans le vide

Dans un espace vide de source : $\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$, on peut démontrer que les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont solutions de l'**équation de d'Alembert** tridimensionnelle :

$$\boxed{\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}} \quad \text{et de même} \quad \boxed{\Delta\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}}$$

Il s'agit d'équation de propagation d'onde à la **célérité** (ici la vitesse de la lumière) c.

En un point M, les champs électromagnétiques $\left(\vec{E}(M,t), \vec{B}(M,t)\right)$ sont engendrés par des sources $(\rho, \vec{j})$ en un point P mais l'action n'est pas instantanée car la célérité c est finie et l'effet à l'instant t en M est dû, après un temps de **retard à la propagation** $\tau = PM/c$ aux sources $\left(\rho(P, t-\tau), \vec{j}(P, t-\tau)\right)$.

2. ARQS magnétique

Déf : Notons T l'échelle caractéristique de variation spatiale de la source (typiquement une période) et D l'échelle de variation spatiale (typiquement la dimension d'un circuit électrique). L'**approximation des régimes quasi-stationnaire ARQS** consiste à négliger le temps de propagation, c'est-à-dire :

$$\tau = \frac{D}{c} \ll T \implies \boxed{D \ll c\,T}$$

Exemple en électrocinétique : $f_{\mathrm{max}} \approx 10\ \mathrm{GHz} \approx \frac{1}{T_{\mathrm{min}}}$ d'où $D_{\mathrm{max}} \ll \frac{c}{f_{\mathrm{max}}} = 30\ \mathrm{m}$ cette condition est respectée en général.

De plus, dans le cadre de l'ARQS magnétique, on considère que les courants dominent les charges d'où : $\boxed{\rho\,c \ll j}$.

Équation de conservation de la charge

Raisonnons en ordre de grandeur pour en déduire les conséquences : $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{j} = 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{\left|\frac{\partial \rho}{\partial t}\right|}{|\operatorname{div} \vec{j}|} \approx \frac{\frac{\rho}{T}}{\frac{j}{D}} \approx \frac{\rho\, c}{j} \frac{D}{c\, T} \ll 1$$

D'où le terme de charge est négligeable, il reste $\boxed{\operatorname{div} \vec{j} = 0}$ en ARQS magnétique, le courant est à flux conservatif et cela permet de démontrer la loi des nœuds.

Équations de Maxwell
Toujours en ordre de grandeur et en norme, l'équation de Maxwell-Faraday impose :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \frac{E}{D} \approx \frac{B}{T} \Rightarrow \frac{E}{B} \approx \frac{D}{T} \ll c \Rightarrow E \ll cB$$

Le champ dominant est donc magnétique (et c permet de comparer des objets de dimensions différentes), et avec l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\frac{\left|\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right|}{\left|\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{B}\right|} \approx \frac{\frac{1}{c^2}\frac{E}{T}}{\frac{B}{D}} \approx \frac{D\, E}{c^2 T B} \approx \frac{D^2}{c^2 T^2} \ll 1$$

On peut alors simplifier l'équation de (M.A.) en $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{B} = \mu_0\, \vec{j}$. Ainsi dans le cadre de l'ARQS magnétique, les calculs de $\vec{B}$ par le théorème d'Ampère stationnaire (fil, bobine) restent valide tout comme les phénomènes d'induction magnétique.

4. ARQS électrique*

Déf : on néglige encore le temps de propagation $D \ll cT$ mais les charges dominent les courants : $j \ll \rho\, c$.

Il n'est dès lors plus possible de simplifier l'équation de conservation de la charge et les termes électriques et magnétiques doivent être équivalents dans l'équation de Maxwell-Ampère donc :

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{B}\right| \approx \left|\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right| \Rightarrow \frac{B}{D} \approx \frac{1}{c^2}\frac{E}{T} \Rightarrow \frac{B}{E} \approx \frac{D}{c^2 T}$$

mais alors pour l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\frac{\left|-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right|}{\left|\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{E}\right|} \approx \frac{\frac{B}{T}}{\frac{E}{D}} \approx \frac{D}{T}\frac{B}{E} \approx \frac{D^2}{c^2 T^2} \ll 1$$

Ainsi, dans le cadre de l'ARQS électrique, on a pour (M.F.) $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{E} = \vec{0}$ et le théorème de Gauss de l'électrostatique reste valide (capacité d'un condensateur, …)

VI. Bilan d'énergie électromagnétique

Il a été vu en première année que l'on peut stocker de l'énergie sous forme magnétique dans une bobine (auto-induction) et nous avons vu l'énergie électrique stockée dans un condensateur. Désormais, nous allons développer la notion d'énergie associée au champ électromagnétique.

1. Puissance cédée par le champ aux charges

Charge ponctuelle en mouvement
Pour une particule de charge q de vitesse $\vec{v}$ soumises à la force de Lorentz, la puissance reçue est :

$$\mathcal{P}_{EM} = \overrightarrow{F_{EM}} \cdot \vec{v} = q\big(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\big) \cdot \vec{v} = q\, \vec{E} \cdot \vec{v} \text{ car le produit mixte } \big(\vec{v} \wedge \vec{B}\big) \cdot \vec{v} = 0$$

La puissance du terme magnétique de la force de Lorentz est nulle.

Densité de charge en mouvement
Pour une répartition en volume $dq = \rho d\mathcal{V}$ avec la densité de charge ρ, la mise en mouvement des charges crée un courant $\vec{j} = \rho \vec{v}$, on a alors la puissance :

$$d\mathcal{P}_{EM} = d\overrightarrow{F_{EM}} \cdot \vec{v} = dq\,\vec{E} \cdot \vec{v} = \rho\,\vec{v} \cdot \vec{E}\,d\mathcal{V} = \vec{j} \cdot \vec{E}\,d\mathcal{V}$$

Ainsi, $\boxed{\dfrac{d\mathcal{P}_{EM}}{d\mathcal{V}} = \vec{j} \cdot \vec{E}}$ en $\mathrm{W.m^{-3}}$ est la **puissance volumique** fournie au courant par le champ $(\vec{E}, \vec{B})$.

Remarque : pour un milieu possédant plusieurs porteurs de charge q_i de vitesse $\vec{v_i}$ et de densité volumique n_i, on a la densité de charges $\rho = \sum_i n_i q_i$ et le courant $\vec{j} = \sum_i n_i q_i \vec{v_i}$ d'où la puissance dans le volume $d\mathcal{V}$:

$$d\mathcal{P}_{EM} = \sum_i n_i q_i d\mathcal{V}\,\vec{E} \cdot \vec{v_i} = \left(\sum_i n_i q_i \vec{v_i}\right) \cdot \vec{E}\,d\mathcal{V} = \vec{j} \cdot \vec{E}\,d\mathcal{V}, \text{on retrouve ainsi : } \frac{d\mathcal{P}_{EM}}{d\mathcal{V}} = \vec{j} \cdot \vec{E}$$

2. Identité de Poynting

On peut démontrer l'**identité de Poynting :**

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{\Pi} + \frac{\partial u_{EM}}{\partial t} = -\vec{j} \cdot \vec{E}} \text{ avec } \boxed{\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}}$$

Interprétation

- Le terme $\operatorname{div} \vec{\Pi}$ correspond au **déplacement d'énergie** électromagnétique, le vecteur de Poynting étant la puissance surfacique du champ $(\vec{E}, \vec{B})$ qui est perpendiculaire à ces deux champs (*cf.* ondes EM).
- Le terme de dérivée de u_{EM} traduit la **variation temporelle d'énergie** électromagnétique **stockée** par les champs avec u_{EM} la **densité d'énergie électromagnétique :**

$$\boxed{u_{EM} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}} \text{ en } \mathrm{J.m^{-3}}$$

Elle comporte un terme électrique $u_E = \dfrac{1}{2}\,\varepsilon_0 E^2$ déjà vu dans le condensateur et un terme magnétique $u_M = \dfrac{1}{2}\dfrac{B^2}{\mu_0}$ qui est son analogue déjà vu en 1ère année.

- Le terme $-\vec{j} \cdot \vec{E}$ correspond à la production d'énergie s'il est positif, sa consommation sinon.

3. Bilan global

Pour une surface Σ fermée, fixe et orientée vers l'extérieur délimitant un volume $\mathcal{V}_\Sigma$, on a, par intégration de l'identité de Poynting :

$$\iiint_{\mathcal{V}_\Sigma} \operatorname{div} \vec{\Pi}\,d\mathcal{V} + \iiint_{\mathcal{V}_\Sigma} \frac{\partial u_{EM}}{\partial t}\,d\mathcal{V} = -\iiint_{\mathcal{V}_\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{E}\,d\mathcal{V} \overset{\text{Ostrogradski}}{\Longrightarrow} \oiint_\Sigma \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} + \frac{d}{dt}\iiint_{\mathcal{V}_\Sigma} u_{EM} d\mathcal{V} = -\iiint_{\mathcal{V}_\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{E}\,d\mathcal{V}$$

On définit l'**énergie électromagnétique** U_{EM} dans le volume $\mathcal{V}_\Sigma$ à l'instant t par :

$$\boxed{U_{EM}(t) = \iiint_{\mathcal{V}_\Sigma} u_{EM}(M,t) d\mathcal{V}} \text{ en J}$$

La **puissance rayonnée** à travers Σ vers l'extérieur ou **flux de Poynting** :

$$\boxed{\mathcal{P}_{ray} = \iint_\Sigma \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} = \Phi_\Pi} \text{ en W}$$

La puissance perdue par le champ électromagnétique dans Σ et cédée aux charges :

$$\boxed{\mathcal{P}_{\text{charges}} = \iiint_{\mathcal{V}_\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{E}\,d\mathcal{V}} \text{ en W}$$

Le bilan global se réécrit alors comme :

$$\boxed{\frac{dU_{EM}}{dt} + \Phi_\Pi = -\mathcal{P}_{\text{charges}}}$$

VII. Bilan énergétique dans un dipôle

1. Conducteur ohmique

Puissance cédée aux porteurs de charge

Un conducteur ohmique obéit à la loi d'Ohm $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ (avec γ ou σ la conductivité en $\mathrm{S.m^{-1}}$) et en géométrie longitudinale, pour un volume $\mathcal{V} = SL$, la résistance est :

$$R = \frac{L}{\gamma S}$$

La densité volumique de puissance cédée par le champ aux charges est :

$$\frac{d\mathcal{P}_R}{d\mathcal{V}} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma E^2 = \frac{j^2}{\gamma} = \frac{I^2}{\gamma S^2} \quad \text{car } I = jS = \gamma ES$$

$$\text{D'où en intégrant sur le volume } \mathcal{V}, \text{on a : } \mathcal{P}_R = \frac{I^2 SL}{\gamma S^2} = \frac{L}{\gamma S} I^2 \Longrightarrow \boxed{\mathcal{P}_R = RI^2}$$

La puissance dissipée par effet Joule s'identifie à la puissance cédée par le champ aux porteurs de charges.

Puissance rayonnée

On peut montrer que le flux de Poynting est : $\boxed{\mathcal{P}_{ray} = RI^2}$

En régime stationnaire et en ARQS magnétique, la puissance électromagnétique entrant dans le dipôle par rayonnement est égale à la puissance transférée aux porteurs de charges.

En conséquence, il n'y a pas d'énergie électrique stockée dans la résistance ($U_{EM} = \text{cte}$).

2. Bobine

La puissance reçue par le solénoïde en tant que dipôle électrocinétique est égale à la puissance entrant dans le solénoïde en électromagnétisme.

Calcul vectoriel

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V\right) &= \vec{0} \\
\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{A}\right) &= 0 \\
\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V\right) &= \Delta V \\
\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{A}\right) &= \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}\, \vec{A}\right) - \Delta \vec{A}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(V_1 . V_2) &= V_1\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V_2 + V_2 \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V_1 \\
\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(V \vec{A}) &= V\, \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{A} + \left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V\right) \wedge \vec{A} \\
\mathrm{div}\,(V \vec{A}) &= V\, \mathrm{div}\, \vec{A} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V . \vec{A} \\
\mathrm{div}\,(\overrightarrow{A_1} \wedge \overrightarrow{A_2}) &= \overrightarrow{A_2} . \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \overrightarrow{A_1} - \overrightarrow{A_1} . \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \overrightarrow{A_2}
\end{aligned}$$

Démonstrations et notions à maitriser :

- Loi de conservation de la charge électrique
- Force de Lorentz
- Équations de Maxwell (formes locales et intégrales associées ainsi que les démonstrations)
- Définitions du potentiel électrostatique
- Équations de Poisson et de Laplace
- Équations de propagations des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ dans le vide (d'Alembert)
- ARQS magnétique, simplification de l'équation de Maxwell-Ampère et courant $\vec{j}$ à flux conservatif
- Puissance cédée par le champ aux charges
- Identité de Poynting, vecteur de Poynting, densité d'énergie électromagnétique, forme globale
- Puissance dissipée par effet Joule
- Inductance propre et mutuelle