TD Ondes électromagnétiques

1. Pouvoir rotatoire

On envoie une onde plane monochromatique polarisée rectilignement sur une cuve de longueur ℓ contenant une substance qui a les propriétés suivantes :

- une onde polarisée circulairement gauche s'y propage avec la vitesse $v_{\varphi G} = \frac{c}{n_G} = \frac{\omega}{n_G k_0}$
- une onde polarisée circulairement droite s'y propage avec la vitesse $v_{\varphi D} = \frac{c}{n_D} = \frac{\omega}{n_D k_0}$.

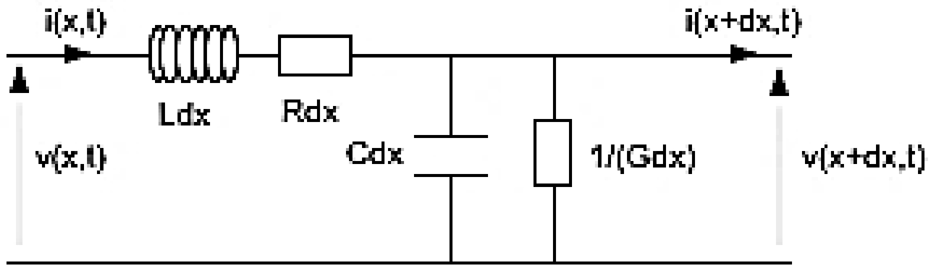
Décrire l'état de polarisation de l'onde à la sortie de la cuve.

2. Voile solaire (problème ouvert)

Quelles est la surface minimale de la voile solaire d'un vaisseau spatial pour que celui-ci quitte l'attraction solaire ?

Données	
Masse du Soleil	$M_S = 2 \times 10^{30}$ kg
Masse du vaisseau	$m = 1$ tonne
Puissance délivrée par le Soleil	$P_S = 4 \times 10^{26}$ W
Distance vaisseau-Soleil	$d = 1{,}5 \times 10^{8}$ km

3. Ligne de transmission



Une ligne de transmission (ou ligne bifilaire) est formée de deux conducteurs séparés par un isolant. Une tranche comprise entre x et $x + dx$ est modélisée comme indiquée sur la figure par une résistance Rdx, une inductance Ldx, une capacité Cdx et une conductance Gdx. (R, L, C et G sont des grandeurs linéiques).

1. Trouver les équations vérifiées par $\frac{\partial v}{\partial x}$ et $\frac{\partial i}{\partial x}$.
En déduire l'équation aux dérivées partielles satisfaite par $v(x,t)$ et appelée équation du télégraphiste.

2. Dans le cas particulier où il n'y a pas de perte électrique, retrouver l'équation de d'Alembert et la vitesse de propagation du signal. Pour une onde progressive, déduire l'impédance d'onde Z de l'équation différentielle liant $v(\tau)$ et $i(\tau)$ $\left(\text{avec } \tau = t - \frac{x}{c}\right)$

3. Déterminer l'équation liant la puissance électrique à l'énergie linéique, interpréter les différents termes.

4. Pour une solution de l'équation du télégraphiste sous la forme d'une OPPM $\underline{V} = \underline{V_0}\exp\left[\mathrm{i}\left(\underline{k}x - \omega t\right)\right]$, avec $\underline{k} = k_0 + \mathrm{i}k_1$ déduire la relation de dispersion de la ligne de transmission. Définir alors une grandeur caractéristique de l'absorption et identifier k_0 et k_1 au 1er ordre pour $k_1 \ll k_0$ et $RG \ll \frac{\omega^2}{c^2}$.

5. À partir de la partie réelle de la relation de dispersion, redéfinir k_0 caractérisant la dispersion.

6. Déterminer les vitesses de phase, de groupe et la relation qui les unie.

4. Réflexion-transmission à l'interface vide-plasma

Les demi-espaces $z \leq 0$ et $z \geq 0$ sont respectivement vide et occupé par un plasma. Une onde plane progressive monochromatique, polarisée rectilignement, arrive en incidence normale sur ce plasma :

$$\underline{\vec{E}_i} = E_0\, e^{i(\omega t - k_0 z)} \vec{u}_x \text{ avec } k_0 = \frac{\omega}{c}$$

Dans un plasma, l'équation de propagation est $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$ et on note $\underline{r}$ et $\underline{t}$ les coefficients de réflexion et transmission en amplitude pour le champ électrique.

1. Écrire la forme des champs électriques et magnétiques, réfléchis et transmis.

2. En utilisant la continuité des champs électriques et magnétiques entre $z = 0^-$ et $z = 0^+$, calculer $\underline{r}$ et $\underline{t}$ en fonction de $\underline{n} = \frac{k}{k_0}$.

3. En déduire les coefficients de réflexion R (transmission T) en énergie en fonction de $\underline{r}$ et $\underline{t}$.

4. Calculer explicitement $\underline{n}$, puis R et T dans le cas où $\omega < \omega_p$. Que conclure ?

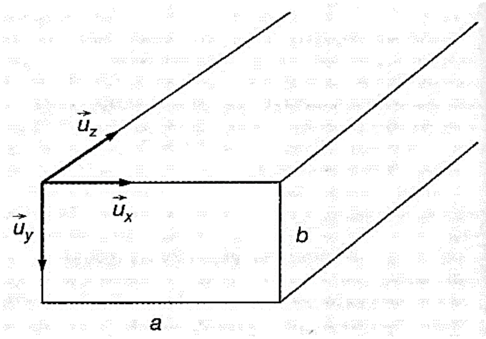
5. Dans le cas où $\omega > \omega_p$, calculer R et T en fonction de $\underline{n}$, dont on donnera aussi l'expression. Commenter le cas où $\omega_p = 0$.

6. Quelle relation existe entre R et T ? Quelle est son interprétation physique ?

5. Propagation guidée

Une cavité rectangulaire ($a \times b$) vide, invariante par translation selon $\vec{u}_z$, est taillée dans un conducteur parfait ($\rho = 0$). On s'intéresse à la propagation d'une onde électromagnétique le long de la direction $\vec{u}_z$:

$$\underline{\vec{E}}(M,t) = f(x,y) \exp[i(\omega t - kz)] \vec{u}_y$$



1. Commenter la forme de cette onde et notamment le fait que f ne dépende pas de z.

2. En utilisant une équation de Maxwell, montrer que f ne dépend que d'une seule variable.

3. À l'aide de l'équation de propagation du champ électrique, trouver une équation différentielle en f et la résoudre en utilisant les conditions aux limites. (Le champ électrique tangentiel s'annule sur les parois de la cavité.)

4. Exprimer le champ électrique $\underline{\vec{E}}$ et commenter le résultat obtenu.

5. Montrer que ce champ électrique ne peut se propager qu'à partir d'une fréquence minimale f_c. Quel type de filtrage effectue ce guide ? Calculer f_c pour $a = 1$ cm et préciser le domaine spectral correspondant.