

# Ondes électromagnétiques 2 : Dispersion et absorption

## I. Propagation d'ondes électromagnétiques dans le vide, un plasma et un métal

### 1. Dans le vide

Au chapitre précédent, on a vu que  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont solutions d'une équation de d'Alembert :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \text{ et } \Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Pour une OPPM  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kz)}$ , cela donne lieu à une équation liant  $k$  à  $\omega$ , la **relation de dispersion** :

$$-k^2 \vec{E} = -\frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} \Rightarrow \boxed{k = \frac{\omega}{c}}$$

dans le cas du vide, cette relation est **linéaire**, il n'y a donc **pas de dispersion**.

### 2. Dans un plasma

On va étudier la propagation dans un milieu donnant lieu à une équation de propagation différente de l'équation de d'Alembert.

Un plasma est un milieu ionisé, constitué d'ion de masse  $M$ , de charge  $+e$  et d'électrons de masse  $m \ll M$  et de charge  $-e$ . Il est localement neutre  $\rho = 0$ , la densité de porteur de charge est  $n_e$ .

La densité de courant est  $\vec{j} = -n_e e \vec{v}$  pour les électrons, les ions sont supposés fixes car  $M \gg m$ .

À l'aide du principe fondamental de la dynamique, on peut établir (à *savoir faire*) l'**équation de propagation** :

$$\boxed{\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{\mu_0 n_e e^2}{m} \vec{E}}$$
 on pose alors la **pulsation plasma**  $\boxed{\omega_p = \sqrt{\frac{n_e e^2}{\epsilon_0 m}}}$

Pour une OPPM  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kz)} \Rightarrow -k^2 \vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} = \frac{\omega_p^2}{c^2} \vec{E}$

On peut en déduire la **relation de dispersion**  $\boxed{k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}}$  caractéristique du milieu via  $\omega_p$ .

### 3. Nature des solutions dans un plasma

Si  $k \in \mathbb{C}$ , on pose  $k = k' + ik''$  (partie réelle et imaginaire)

Pour  $\omega < \omega_p$ ,  $k^2 < 0$  d'où  $k = \pm \frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c} = \pm ik''$  alors  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t \pm ik''z)} = \vec{E}_0 e^{\mp k''z} e^{i\omega t}$   
et  $\vec{E} = \Re(\vec{E}) = \vec{E}_0 e^{\mp k''z} \cos(\omega t + \varphi)$

Dans ce cas, il n'y a pas de propagation car  $z$  et  $t$  sont découplés. La solution en  $e^{+k''z}$  est divergente, elle est non physique. La solution en  $e^{-k''z}$  décroît avec la profondeur de pénétration et donne une **onde évanescente**.

Pour  $\omega > \omega_p$ ,  $k = \pm \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$  alors  $\vec{E} = \Re(\vec{E}) = \vec{E}_0 \cos(\omega t \pm kz + \varphi)$ , l'onde se propage selon  $\pm z$ .

Le plasma se comporte comme un filtre passe-haut de fréquence de coupure  $f_p = \omega_p/2\pi$ .

Une application importante de ce phénomène est présente pour les communications radio, l'ionosphère situé entre 60 km et 300 km d'altitude est considérée comme un plasma avec  $n_e = 10^{12} \text{ m}^{-3}$  d'où  $f_p \approx 9,0 \text{ MHz}$ .

On utilise alors les grandes ondes (LW, exemple  $f = 164 \text{ kHz}$  France Inter, RTL, RMC) qui se réfléchissent sur l'ionosphère ou au contraire, le domaine des fréquences modulés (FM,  $f = 105,5 \text{ MHz}$  France Info) et au-delà de  $10^8 \text{ Hz}$ , l'ionosphère est transparente, cela permet la communication avec les satellites.

### 4. Propagation dans un conducteur ohmique

Comme pour le plasma, on étudie la propagation d'un champ  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kz)}$  et  $\vec{B}$  associé dans un métal.

#### Modèle de Drude

On reprend le modèle de Drude, on considère le métal comme constitué d'ions positifs fixes (lourds) et d'électrons de conduction de masse  $m$  (légers), de densité volumique  $n_e$ , de charge  $-e$ . Ces électrons subissent des chocs entre eux et avec le réseau cristallin

modélisable par une force de frottement fluide  $\vec{f} = -\frac{m}{\tau} \vec{v}$  où  $\tau \approx 10^{-14} \text{ s}$  est le temps de collision.

## Mouvement des électrons

La relation fondamentale s'écrit alors :

$$m \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} = -\frac{m}{\tau} \underline{v} - e \underline{E} - e \underline{v} \wedge \underline{B}$$

On suppose la force magnétique négligeable (faible vitesse  $v \ll c$ ), après le régime transitoire, il reste le régime sinusoïdal forcé, la réponse à l'excitation électrique donne une vitesse  $\underline{v} = \underline{v}_0 e^{i\omega t}$  de même fréquence et éventuellement déphasée d'où :

$$m(i\omega) \underline{v} = -\frac{m}{\tau} \underline{v} - e \underline{E} \Rightarrow \underline{v} = -\frac{e\tau}{m(1+i\omega\tau)} \underline{E}$$

### Densité volumique de courant

Comme  $\underline{j} = n_e(-e)\underline{v} = \frac{n_e e^2 \tau}{m(1+i\omega\tau)} \underline{E}$

on définit une conductivité complexe  $\underline{\gamma}$  par  $\underline{j} = \underline{\gamma} \underline{E}$ , alors :

$$\underline{\gamma} = \frac{n_e e^2 \tau}{m(1+i\omega\tau)}$$

il y a un déphasage entre le champ  $\underline{E}$  exciteur et le courant résultant, de manière analogue à un **filtre passe-bas d'ordre 1**.

À basse fréquence, pour  $\omega \ll \frac{1}{\tau}$ , on a  $\underline{\gamma} \approx \frac{n_e e^2 \tau}{m} \approx 10^7 \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$ , la conductivité est réelle comme en régime stationnaire ou en ARQS.

À haute fréquence, pour  $\omega \gg \frac{1}{\tau}$ , on a  $\underline{\gamma} \approx -\frac{in_e e^2}{m\omega}$  la conductivité est imaginaire pure comme pour le plasma, l'effet des collisions disparaît. En fait, le champ  $\underline{E}$  change de signe trop rapidement pour entraîner les chocs.

## 5. Relation de dispersion d'un conducteur ohmique

### Relation de dispersion

On peut établir la relation de dispersion dans le conducteur pour un champ  $\underline{E} = \underline{E}_0 e^{i(\omega t - kz)}$  :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - i\mu_0 \underline{\gamma} \omega$$

## II. Dispersion, absorption et paquet d'ondes

On a établi deux relations de dispersion où  $\underline{k}$  est complexe et dépend de  $\omega$  avec  $\underline{k}(\omega) = k'(\omega) - ik''(\omega)$  (avec la convention  $\underline{E} = \underline{E}_0 e^{i(kz - \omega t)}$ , on prendrait  $\underline{k}(\omega) = k'(\omega) + ik''(\omega)$ )

### 1. Vitesse de phase et atténuation

Pour une onde polarisée selon  $x$  se propageant selon  $z$ , on a :

$$\begin{aligned} \underline{E}(z, t) &= \underline{E}_0 \underline{u}_x \exp[i(\omega t - \underline{k}(\omega)z)] = \underline{E}_0 \exp(-k''(\omega)z) \exp[i(\omega t - k'(\omega)z)] \underline{u}_x \\ \Rightarrow \underline{E}(z, t) &= \Re(\underline{E}) = E_0 \exp(-k''(\omega)z) \cos\left(\frac{\omega t - k'(\omega)z}{\omega(t - \frac{z}{v_\varphi})} + \varphi\right) \underline{u}_x \end{aligned}$$

Le signal est une onde progressive (non plane) dans la direction  $z$  de vecteur d'onde  $k' \underline{u}_x$ , elle se propage à la **vitesse de phase** :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k'(\omega)} = \frac{c}{\Re(n(\omega))}$$

Comme  $v_\varphi$  dépend de  $\omega$ , le milieu est dit **dispersif**, si l'onde est une superposition d'OPPH de différente pulsation, leur vitesse de propagation  $v_\varphi$  diffèrent, un déphasage apparaît (pour  $z \neq 0$ ) et l'onde résultante se déforme.

<http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/divers/paquet.html>

De plus, le **milieu** est, en général **passif** :  $k' \cdot k'' \geq 0$  donc pour  $k' > 0, k'' > 0$ , la propagation est selon  $+z$  et l'onde s'atténue au cours de la propagation (terme en  $e^{-k''z}$  car le milieu est **absorbant** (dissipation d'énergie) avec une distance caractéristique d'atténuation :  $\delta(\omega) = 1/|k''(\omega)|$ )

### 2. Propagation d'une superposition de deux ondes de pulsations voisines

<http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/meca/ondedisp.html>

On définit la **vitesse de groupe** comme :  $v_g(\omega) = \frac{d\omega}{dk'} = \left(\frac{dk'}{d\omega}\right)^{-1}$

La vitesse de groupe s'identifie, en général, à la **vitesse de l'énergie**.

### 3. Paquet d'ondes

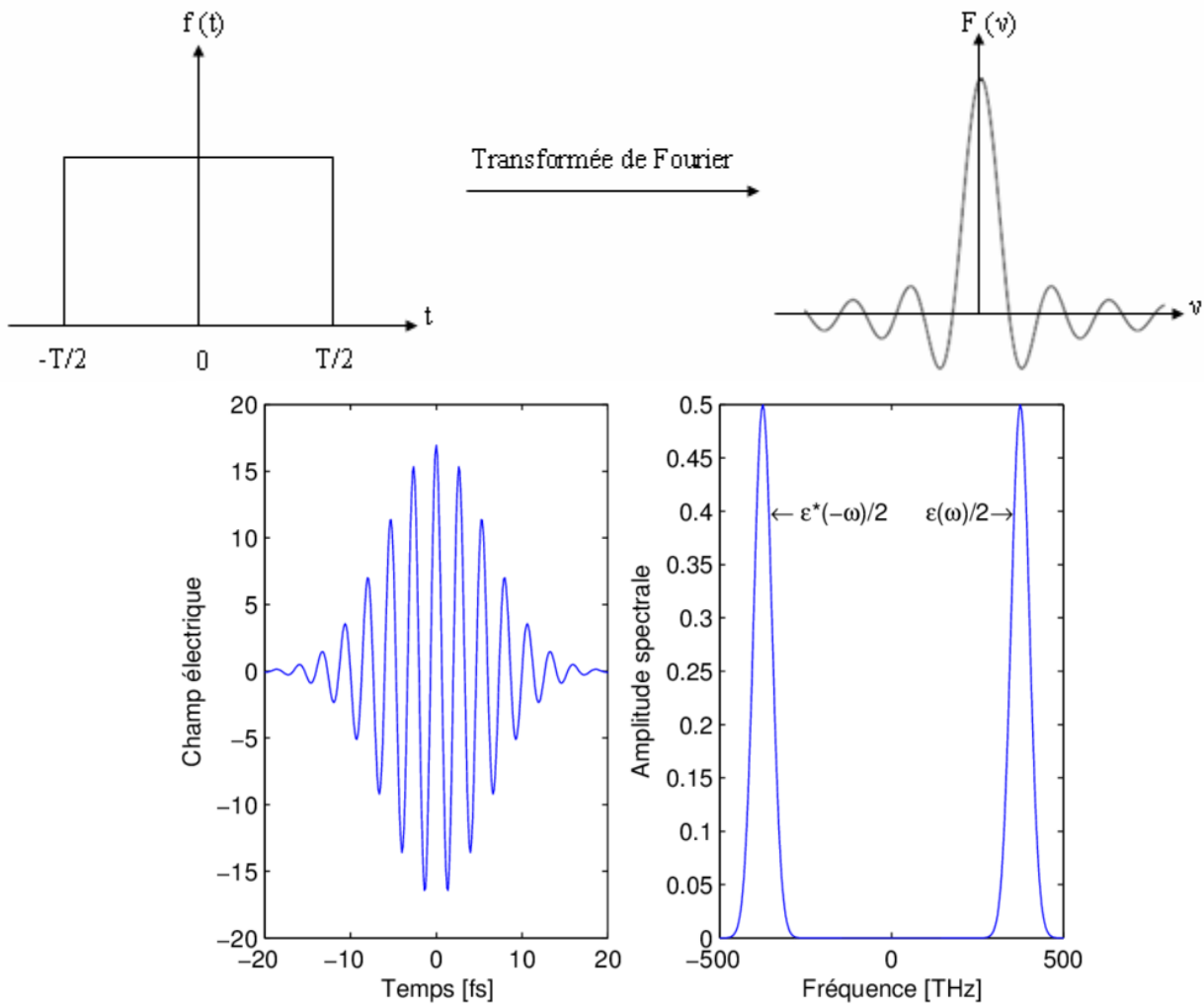
Une OPPH n'a pas de réalité physique (extension spatiale et temporelle infinie), c'est un modèle mathématique. Une onde physique peut être représentée comme une superposition d'OPPH à l'aide d'une décomposition de Fourier :

$$\underline{s}(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{A}(\omega) \exp[i(\omega t - k(\omega)z)] d\omega \quad \text{avec} \quad \underline{A}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{s}(0, t) \exp(-i\omega t) dt$$

On qualifie de **paquet d'ondes**, une onde dont l'amplitude  $A(\omega)$  ne prend de valeurs significatives que sur un intervalle étroit  $[\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}; \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}]$  avec  $\Delta\omega \ll \omega_0$ . On a alors :

$$\underline{s}(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} \underline{A}(\omega) \exp[i(\omega t - k(\omega)z)] d\omega$$

**Exemple** profil rectangulaire et gaussien :



Une des propriétés de l'analyse de Fourier est :  $\Delta\omega \cdot \Delta t \sim 1$  plus l'extension temporelle  $\Delta t$  est limitée, plus la bande spectrale  $\Delta\omega$  constituant ses composantes de Fourier est large.

## III. Interfaces entre deux milieux

### 1. Indice complexe

La relation de dispersion lie le vecteur d'onde  $\underline{k}$  complexe à la pulsation  $\omega$ , on définit alors l'**indice complexe**  $\underline{n}$  par :

$$\underline{k}(\omega) = \frac{\underline{n}(\omega) \omega}{c} \quad \text{or} \quad \underline{k} = k'(\omega) - ik''(\omega) \Rightarrow \underline{n} = n'(\omega) - in''(\omega)$$

La propagation est liée à l'**indice de réfraction**  $n'(\omega) = \Re(\underline{n}(\omega))$  et  $n''(\omega) = -\Im(\underline{n}(\omega))$  est l'**indice d'absorption**.

Dans le vide, pour une longueur d'onde  $\lambda_0$ , on a  $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$  et  $v_\varphi = \frac{\omega}{k_0} = c$  ; dans un milieu d'indice de réfraction  $n'$ , on définit

$$k'_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} \text{ avec } \lambda_1 = \frac{\lambda_0}{n'_1} \text{ et } \boxed{v_\varphi = \frac{\omega}{k'_1} = \frac{\omega}{n'_1 k_0} = \frac{c}{n'_1(\omega)}}$$

## 2. Position du problème

On considère une OPPH en incidence normale sur un dioptre en  $z = 0$  entre deux milieu 1 et 2. Pour l'onde incidente de vecteur d'onde  $\vec{k}_i = k_1 \vec{u}_z = \frac{n_1 \omega}{c} \vec{u}_z$ , il va apparaître une onde réfléchie avec  $\vec{k}_r = -k_1 \vec{u}_z$  et une éventuelle onde transmise avec  $\vec{k}_{tr} = k_2 \vec{u}_z = \frac{n_2 \omega}{c} \vec{u}_z$ .

La linéarité des équations de Maxwell impose aux champs réfléchis et transmis d'être de même pulsation et polarisation que l'onde incidente.

## 3. Coefficients de réflexion et de transmission

On peut établir les **coefficients de réflexion  $r$**  et de **transmission  $t$  en amplitude** par :

$$\underline{r} = \frac{E_{0r}}{E_{0i}} \Rightarrow \boxed{r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}} \text{ et } \underline{t} = \frac{E_{0tr}}{E_{0i}} \Rightarrow \boxed{t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}}$$

Ces coefficients sont, en général, complexe, par contre, en optique pour des milieux diélectriques transparents, ils sont réels et  $t > 0$  alors les champs incident et transmis sont en phase. Pour le champ réfléchi,

- si  $n_1 > n_2 \Rightarrow r > 0$ , les champs incidents et réfléchi sont en phase
- si  $n_1 < n_2 \Rightarrow r < 0$ , les champs incidents et réfléchi sont en opposition de phase

On définit aussi des **coefficients en énergie (ou en puissance)** via les vecteurs de Poynting (partie algébrique) avec :

$$\mathcal{P}_S(\pm \vec{u}_z) = \langle \vec{\Pi} \rangle = \langle \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \Re(\vec{E} \wedge \vec{B}^*) = \frac{1}{2\mu_0} \Re \left[ \vec{E} \wedge \frac{(\vec{k} \wedge \vec{E})^*}{\omega} \right] = \Re(\vec{k}) \frac{|\vec{E}|^2}{2\mu_0 \omega} = \Re(n) \frac{\varepsilon_0 c}{2} |E_0|^2 (\pm \vec{u}_z)$$

alors on a les **coefficient de réflexion  $R$**  et de **transmission  $T$**  :

$$R = \frac{\langle \vec{\Pi}_r \cdot (-\vec{u}_z) \rangle}{\langle \vec{\Pi}_i \cdot \vec{u}_z \rangle} = \frac{|E_{0r}|^2}{|E_{0i}|^2} = |r|^2 \text{ et } T = \frac{\langle \vec{\Pi}_{tr} \cdot \vec{u}_z \rangle}{\langle \vec{\Pi}_i \cdot \vec{u}_z \rangle} = \Re \left( \frac{n_2}{n_1} \right) \frac{|E_{0tr}|^2}{|E_{0i}|^2} = |t|^2 \Re \left( \frac{n_2}{n_1} \right)$$

Si  $R + T = 1$ , on constate la conservation de l'énergie.

## 4. Cas d'une interface vide-plasma avec $\omega > \omega_p$

Le milieu 1 est du vide :  $k_1 = \frac{\omega}{c}, n_1 = 1$  et le milieu 2 est un plasma **peu dense** avec  $\omega_p^2 = \frac{n_p e^2}{m \varepsilon_0}$  :

$$k_2^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} > 0 \quad (\Delta) \Rightarrow k_2 = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2} = n_2 \frac{\omega}{c} \text{ avec } n_2 = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2} \in [0 ; 1]$$

### Vitesse de phase et de groupe

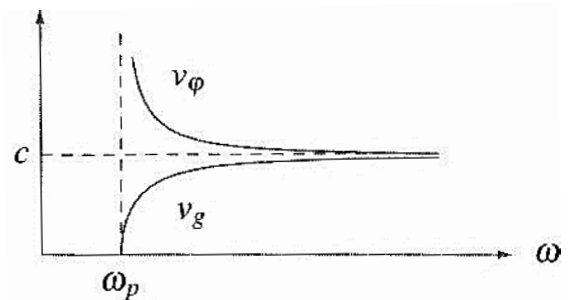
On a, dans le plasma :

$$\boxed{v_\varphi = \frac{\omega}{k_2} = \frac{c}{n_2} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}} > c}$$

Pour calculer  $v_g$ , effectuons la différentielle de  $(\Delta)$  avec  $\omega_p$  et  $c$  constantes :

$$2k_2 dk_2 = 2\omega \frac{d\omega}{c^2} \Rightarrow \frac{\omega}{k_2} \frac{d\omega}{dk_2} = c^2 \Rightarrow v_\varphi v_g = c^2 \text{ alors :}$$

$$\boxed{v_g = \frac{d\omega}{dk_2} = c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2} = cn_2}$$



On constate que  $v_\varphi > c$ , ce n'est pas gênant car cette vitesse ne représente pas une propagation d'un objet matériel ; au contraire,  $v_g \leq c$ , c'est la vitesse du paquet d'onde donc de l'information et de l'énergie.

### Vitesse de l'énergie

Dans un plasma, le vecteur de Poynting moyen est donné par :

$$\langle \vec{\Pi}_{tr} \rangle = \left\langle \frac{\vec{E}_2 \wedge \vec{B}_2}{\mu_0} \right\rangle = \frac{1}{2} \Re \left( \frac{\vec{E}_{tr} \wedge \vec{B}_{tr}^*}{\mu_0} \right) = \frac{|E_{otr}|^2}{2\mu_0} \frac{k_2}{\omega} \vec{u}_z = \frac{n_2}{2\mu_0 c} |E_{otr}|^2 \vec{u}_z = \frac{n_2}{2} \varepsilon_0 c |E_{otr}|^2 \vec{u}_z$$

L'énergie moyenne du champ est :

$$\langle u_{EM} \rangle = \left\langle \frac{\varepsilon_0 E_{tr}^2}{2} + \frac{B_{tr}^2}{2\mu_0} \right\rangle = \frac{\varepsilon_0 |E_{otr}|^2}{4} + \frac{k_2^2 |E_{otr}|^2}{4\mu_0 \omega^2} = \frac{\varepsilon_0 |E_{otr}|^2}{4} \left( 1 + \frac{k_2^2 c^2}{\omega^2} \right) = \frac{\varepsilon_0 |E_{otr}|^2}{4} (1 + n_2^2)$$

La densité volumique d'énergie cinétique des électrons (de densité volumique  $n_p$ ) est, en moyenne :

$$\langle e_c \rangle = n_p \left\langle \frac{1}{2} m \underline{v}^2 \right\rangle \text{ avec } \underline{v} = \frac{ie}{m\omega} \vec{E}_{tr} \text{ donc } \langle e_c \rangle = \frac{n_p e^2}{4m\omega^2} |E_{otr}|^2 = \frac{\varepsilon_0 |E_{otr}|^2 \omega_p^2}{4\omega^2} = \frac{\varepsilon_0 |E_{otr}|^2}{4} (1 - n_2^2)$$

d'où la densité volumique moyenne d'énergie (de vitesse  $v_\varepsilon$ ) :

$$\langle u_{tot} \rangle = \langle u_{EM} \rangle + \langle e_c \rangle = \frac{\varepsilon_0 |E_{otr}|^2}{2} \text{ or } \langle \vec{\Pi}_{tr} \rangle = \langle u_{tot} \rangle \vec{v}_\varepsilon \Rightarrow \underline{v}_\varepsilon = \underline{n}_2 \underline{c} = \underline{v}_g$$

Dans un milieu transparent, la vitesse de groupe est la vitesse de l'énergie.

### Coefficient de réflexion et de transmission

$$r = \frac{1 - n_2}{1 + n_2} > 0 \Rightarrow R = |r|^2 = \left( \frac{1 - n_2}{1 + n_2} \right)^2 \text{ et } t = \frac{2}{1 + n_2} > 0 \Rightarrow T = |t|^2 \Re \left( \frac{n_2}{n_1} \right) = \frac{4n_2}{(1 + n_2)^2}$$

On a  $R + T = 1$  (conservation de l'énergie) et il y a réflexion totale ( $R \rightarrow 1, T \rightarrow 0$ ) pour  $n_2 \rightarrow 0 \Leftrightarrow \omega \rightarrow \omega_p$ .

### 5. Cas d'une interface vide-plasma avec $\omega < \omega_p$

Dans ce cas,  $k_2 = -ik_2'' = -i \frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c} = \underline{n}_2 \frac{\omega}{c}$  d'où  $\underline{n}_2 = -in_2''$  avec  $n_2'' = \sqrt{\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 - 1} > 0$

Comme  $k_2$  et  $\underline{n}_2$  sont imaginaires purs, **l'onde est évanescence**, il n'y a pas d'onde transmise,  $v_\varphi$  et  $v_g$  ne sont pas définis, de plus  $\vec{E}_{tr}$  et  $\vec{B}_{tr}$  sont en quadrature d'où  $\langle \vec{\Pi} \rangle = \vec{0}$  (résultat immédiat en notation complexe).

$$\underline{r} = \frac{1 - in_2''}{1 + in_2''} \Rightarrow R = |\underline{r}|^2 = \frac{1 + n_2''^2}{1 + n_2''^2} = 1 \text{ et } \underline{t} = \frac{2}{1 + in_2''} \Rightarrow T = |\underline{t}|^2 \Re \left( \frac{n_2}{n_1} \right) = 0$$

Il y a réflexion totale sans perte d'énergie avec un déphasage  $\varphi = \text{Arg}(\underline{r})$ . (Applications aux télécommunications)

### 6. Cas d'une interface vide-métal à basse fréquence

#### Effet de peau

On peut définir l'épaisseur de peau  $\delta$  qui est une **distance caractéristique de l'amortissement** par :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma_0 \omega}} \text{ donc } \boxed{k_2 = \pm \frac{1-i}{\delta}} = k_2' - ik_2''$$

Pour un conducteur (cuivre), à  $f = 50$  Hz :  $\delta \approx 7$  mm la répartition est uniforme dans un fil en électronique (GBF) et

à  $f = 5$  GHz :  $\delta \approx 0,7$   $\mu\text{m}$  à moyenne fréquence, le courant est répartie en surface d'où l'intérêt du câble coaxial.

Un champ électromagnétique de pulsation  $\omega$  ne pénètre dans un conducteur que sur une épaisseur de l'ordre de  $\delta$  au voisinage de la surface : c'est l'**effet de peau**.

#### Animations

Effet de peau dans un conducteur : <https://youtu.be/MUcderr-BqY>

Onde stationnaire après réflexion sur un conducteur parfait : <https://youtu.be/4d-U90UNs0g>

Isolement d'un téléphone portable (effet de peau dans l'aluminium) : <https://youtu.be/crJN163QaK8>

#### Vitesse de phase et de groupe

Le vecteur d'onde  $\underline{k}_2 = \frac{1-i}{\delta} = k_2' - ik_2'' \Rightarrow k_2' = \frac{1}{\delta} = \sqrt{\frac{\mu_0 \gamma_0 \omega}{2}}$  conduit à :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k_2'} = \omega \delta = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0 \gamma_0}} \text{ et } v_g = \frac{d\omega}{dk_2'} = \left( \frac{dk_2'}{d\omega} \right)^{-1} = \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_0 \gamma_0}{2\omega}} \right)^{-1} \Rightarrow v_g = 2 \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0 \gamma_0}}$$

Le milieu est dispersif, un paquet d'ondes se déforme au cours de la propagation, il est aussi absorbant, l'onde cède de l'énergie (effet Joule).

### Champ et puissance moyenne

On a :  $\vec{E}_{tr} = \underline{E}_{0tr} \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \exp\left[i\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\right] \vec{u}_x \Rightarrow \vec{E}_{tr} = E_{0tr} e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} + \varphi_{tr}\right) \vec{u}_x$  et  $\underline{k}_2 = +\frac{\sqrt{2}}{\delta} e^{-\frac{i\pi}{4}}$  d'où :

$$\vec{B}_{tr} = \frac{k_2 E_{0tr}}{\omega} e^{-\frac{z}{\delta}} \exp\left[i\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\right] \vec{u}_y = \frac{\sqrt{2}}{\delta \omega} e^{-\frac{i\pi}{4}} E_{0tr} e^{-\frac{z}{\delta}} \exp\left[i\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\right] \vec{u}_y$$

$$\Rightarrow \vec{B}_{tr} = \frac{\sqrt{2} E_{0tr}}{\delta \omega} e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4} + \varphi_{tr}\right) \vec{u}_y$$

$\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont déphasés de  $\pi/4$ , la puissance moyenne transportée est alors, en notation complexe :

$$\langle \vec{\Pi}_{tr} \rangle = \frac{1}{2} \Re\left(\frac{\vec{E}_{tr} \wedge \vec{B}_{tr}^*}{\mu_0}\right) = \frac{E_{0tr}^2}{2\mu_0} e^{-\frac{2z}{\delta}} \Re\left(\frac{1-i}{\delta \omega}\right) \vec{u}_z = \frac{E_{0tr}^2}{2\mu_0 \delta \omega} e^{-\frac{2z}{\delta}} \vec{u}_z$$

La puissance diminue avec une distance caractéristique  $\delta/2$ .

### Coefficient de réflexion et de transmission

Le milieu 1 est du vide avec  $n_1 = 1$  et le milieu 2 est du métal avec  $\underline{k}_2 = \frac{1-i}{\delta} = \underline{n}_2 \frac{\omega}{c}$ , on pose  $\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega}$  (dans le vide)

$$\Rightarrow \underline{n}_2 = \frac{c}{\omega} \frac{1-i}{\delta} = \frac{\lambda_0}{2\pi} \frac{1-i}{\delta} = \frac{1-i}{\varepsilon} \text{ en notant } \varepsilon = \frac{2\pi\delta}{\lambda_0} = \frac{\delta\omega}{c} \ll 1 \text{ (déphasage)}$$

$$\underline{r} = \frac{n_1 - \underline{n}_2}{n_1 + \underline{n}_2} = \frac{\varepsilon - 1 + i}{\varepsilon + 1 - i} \text{ et } \underline{t} = \frac{2n_1}{n_1 + \underline{n}_2} = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon + 1 - i} \approx \frac{2\varepsilon}{1 - i}$$

À la limite des basses fréquences,  $\varepsilon \rightarrow 0$ , on observe  $\underline{r} \rightarrow -1$  et  $\underline{t} \rightarrow 0$ . Il s'agit de la limite du **conducteur parfait** ( $\varepsilon \rightarrow 0 \Rightarrow \gamma_0 \rightarrow \infty$ ), il n'y a pas d'onde transmise mais **réflexion totale** sur le métal avec un déphasage de  $\pi$ .

## 7. Cas d'une interface vide-métal à haute fréquence (domaine optique)

### Relation de dispersion

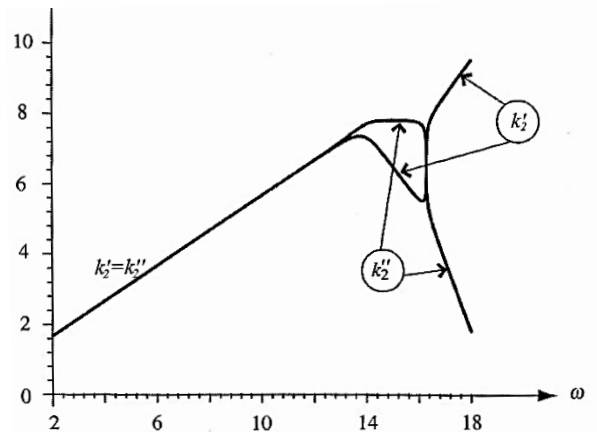
$$\text{On repart de : } \underline{k}_2^2(\omega) = \frac{\omega^2}{c^2} - i\mu_0\gamma(\omega)\omega = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{i\mu_0\gamma_0\omega}{1+i\omega\tau}$$

Dans le domaine optique,  $f \approx 10^{15}$  Hz  $\approx 1$  THz  $\Rightarrow \omega \approx 10^{16}$  rad.s<sup>-1</sup> et  $\tau \approx 10^{-14}$  s d'où  $1 + i\omega\tau \approx i\omega\tau$  alors :

$$\underline{k}_2^2(\omega) = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\mu_0\gamma_0 c^2}{\tau c^2} = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\gamma_0}{\varepsilon_0\tau c^2} = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

$$\text{avec } \omega_p = \sqrt{\frac{\gamma_0}{\varepsilon_0\tau}} \approx 3.10^{16} \text{ rad.s}^{-1} \left( \begin{array}{l} \mu_0\varepsilon_0 c^2 = 1 \text{ USI} \\ \lambda_{0p} = \frac{2\pi c}{\omega_p} \approx 600 \text{ nm} \end{array} \right)$$

Le métal se comporte comme un plasma de pulsation plasma  $\omega_p$ .



Partie réelle et partie imaginaire du nombre d'onde dans un métal en fonction de la pulsation.

### Transparence ultraviolette des métaux (très haute fréquence)

Pour  $\omega > \omega_p$ , on retrouve  $n_2 = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}$  réel, l'onde peut être transmise, le milieu est dispersif et non absorbant.

Pour le cuivre, cela permet pour  $\lambda \approx 0,1 \mu\text{m}$  de laisser passer les ultra-violet.

### Réflexion métallique pour le visible (fréquence intermédiaire)

Pour  $\omega < \omega_p$ ,  $\underline{k}_2$  et  $\underline{n}_2$  sont imaginaires purs,  $n_2'' = \sqrt{\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 - 1} > 0$ , on a désormais  $\frac{1}{\tau} \ll \omega < \omega_p$ .

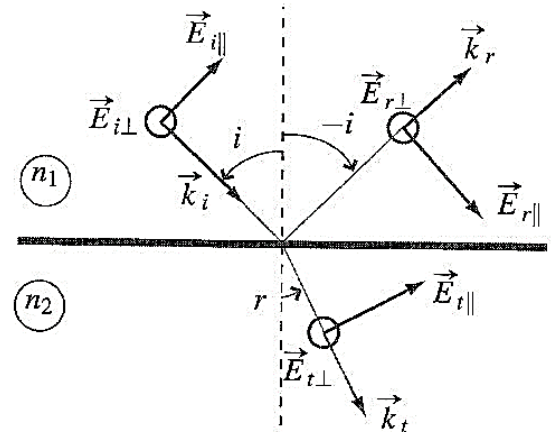
C'est le domaine du visible, l'onde est évanescence dans le métal, il y a réflexion comme dans un miroir :

$$\underline{r} = \frac{1 - in_2''}{1 + in_2''} \Rightarrow R = |\underline{r}|^2 = \frac{1 + n_2''^2}{1 + n_2''^2} = 1 \quad \text{et} \quad \underline{t} = \frac{2}{1 + in_2''} \Rightarrow T = |\underline{t}|^2 \Re\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = 0$$

si  $1/\tau \ll \omega \ll \omega_p$ , alors  $n_2'' \gg 1$  et  $\underline{r} \rightarrow -1 = e^{i\pi}$ , le **déphasage est égal à  $\pi$**  (pour le cuivre, on a  $n_2'' \approx 6 \Rightarrow \varphi \approx 160^\circ \neq 180^\circ$ )

### 8. Polarisation par réflexion vitreuse

Considérons une onde électromagnétique arrivant sur une interface entre deux milieux d'indices  $n_1$  et  $n_2$  réels. Le champ électrique incident peut se décomposer selon :  $\vec{E}_i = \vec{E}_{i\parallel} + \vec{E}_{i\perp}$  avec une composante dans le plan d'incidence  $\vec{E}_{i\parallel}$  et une composante perpendiculaire  $\vec{E}_{i\perp}$ . Il en est de même pour les champs réfléchis et transmis.



On admet que, en incidence quelconque d'angle  $\hat{i}$  et réflexion  $\hat{r}$ , les coefficients de réflexion  $r_{\parallel}$  et  $r_{\perp}$  sont données par :

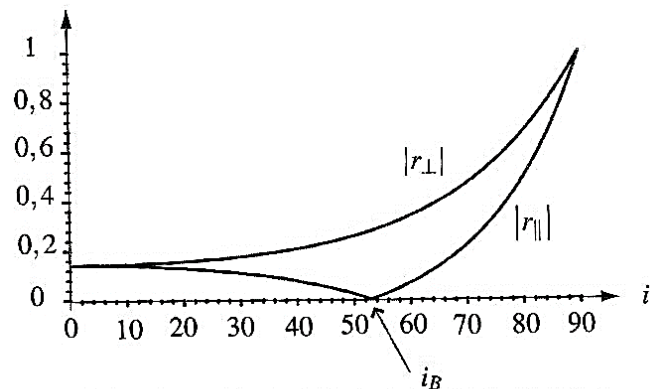
$$r_{\parallel} = \frac{E_{r\parallel}}{E_{i\parallel}} = \frac{\tan(\hat{r} - \hat{i})}{\tan(\hat{r} + \hat{i})} \quad \text{et} \quad r_{\perp} = \frac{E_{r\perp}}{E_{i\perp}} = \frac{\sin(\hat{r} - \hat{i})}{\sin(\hat{r} + \hat{i})}$$

Pour  $n_2 > n_1$ , on a  $|r_{\perp}| > |r_{\parallel}|$  : polarisation partielle.

De plus,  $r_{\parallel}$  s'annule pour  $i_B + \hat{r} = \pi/2$  or avec la relation de Descartes  $n_1 \sin i_B = n_2 \sin \hat{r}$ , d'où :

$$\sin \hat{r} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - i_B\right) = \cos i_B$$

$$\Rightarrow \boxed{\tan i_B = \frac{n_2}{n_1}}$$

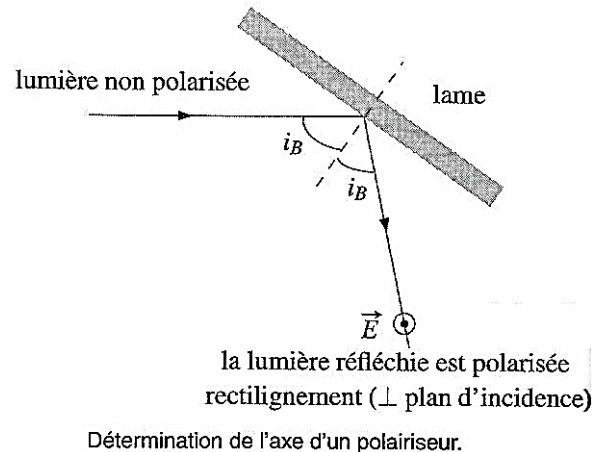


Coefficients de réflexion à l'interface entre deux milieux.

L'onde réfléchie est alors **polarisée rectilignement** dans le plan d'incidence pour l'angle de Brewster  $i_B$ .

#### Application à la détermination de l'axe d'un polariseur

Pour une interface air-verre, on a  $n_1 = 1$  et  $n_2 \approx 1,5$  d'où  $i_B \approx 56^\circ$  alors, en éclairant sous incidence de Brewster une lame de verre et en plaçant sur le faisceau réfléchi un polariseur monté sur une monture rotative, on tourne le polariseur jusqu'à éteindre le faisceau (intensité nulle). La direction  $\vec{v}$  du polariseur est alors perpendiculaire à  $\vec{E}_{r\perp}$  donc elle est dans le plan d'incidence.



<b>2. Phénomènes de propagation linéaires</b>	
<b>2.1 Ondes électromagnétiques dans les plasmas et dans les métaux</b>	
<p>Interaction entre une onde plane progressive harmonique et un plasma localement neutre sans collisions. Conductivité imaginaire pure. Interprétation énergétique.</p> <p>Propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu localement neutre possédant une conductivité complexe : relation de dispersion, indice complexe. Dispersion, absorption.</p> <p>Cas particulier d'une propagation unidirectionnelle dans un plasma sans collisions : onde évanescente dans le domaine réactif (<math>\omega &lt; \omega_p</math>) ; absence de propagation de l'énergie en moyenne temporelle.</p> <p>Cas particulier d'un conducteur ohmique de conductivité réelle : effet de peau.</p>	<p>Décrire le modèle. Construire une conductivité complexe en justifiant les approximations. Associer le caractère imaginaire pur de la conductivité complexe à l'absence de puissance échangée en moyenne temporelle entre le champ et les porteurs de charges.</p> <p>Établir une relation de dispersion pour des ondes planes progressives harmoniques. Associer les parties réelle et imaginaire de <math>\vec{k}</math> aux phénomènes de dispersion et d'absorption.</p> <p>Reconnaître une onde évanescente (onde stationnaire atténuée).</p> <p>Repérer une analogie formelle avec les phénomènes de diffusion. Connaître l'ordre de grandeur de l'épaisseur de peau du cuivre à 50Hz.</p>
<b>2.2 Paquets d'ondes</b>	
<p>Propagation d'un paquet d'ondes dans un milieu non absorbant et faiblement dispersif : vitesse de phase et vitesse de groupe.</p>	<p>Déterminer la vitesse de groupe à partir de la relation de dispersion. Associer la vitesse de groupe à la propagation de l'enveloppe du paquet d'ondes.</p>
<b>3. Interfaces entre deux milieux</b>	
<p>Réflexion, transmission d'une onde acoustique plane progressive sous incidence normale sur une interface plane infinie entre deux fluides : coefficients de réflexion et de transmission en amplitude des vitesses, des surpressions et des puissances acoustiques surfaciques moyennes.</p> <p>Réflexion d'une onde plane progressive harmonique entre deux demi-espaces d'indices complexes <math>\underline{n}_1</math> et <math>\underline{n}_2</math> sous incidence normale : coefficients de réflexion et de transmission du champ électrique.</p> <p>Cas d'une interface vide-plasma. Coefficients de réflexion et de transmission en puissance.</p> <p>Cas d'une interface vide-conducteur ohmique de conductivité réelle constante.</p> <p>Cas d'une interface vide-conducteur ohmique dans le domaine optique visible.</p>	<p>Expliciter des conditions aux limites à une interface. Établir les expressions des coefficients de transmission et de réflexion. Associer l'adaptation des impédances au transfert maximum de puissance.</p> <p>Exploiter la continuité (admise) du champ électromagnétique dans cette configuration pour obtenir l'expression du coefficient de réflexion en fonction des indices complexes.</p> <p>Distinguer les comportements dans le domaine de transparence et dans le domaine réactif du plasma.</p> <p>Établir les expressions des coefficients de réflexion et transmission du champ pour un métal réel. Passer à la limite d'une épaisseur de peau nulle.</p> <p>Identifier le comportement du métal dans ce domaine, avec celui d'un plasma localement neutre peu dense en-dessous de sa pulsation de plasma. Associer la forme du coefficient complexe de réflexion à l'absence de propagation d'énergie dans le métal en moyenne temporelle.</p>
<p><b>Polarisation par réflexion vitreuse sous incidence oblique.</b></p>	<p><b>Identifier l'incidence de Brewster et utiliser cette configuration pour repérer la direction absolue d'un polariseur</b></p>

## Démonstrations et notions à maîtriser :

- Démonstration de l'équation de propagation dans un milieu (plasma, métal) et pulsation associée
- Relation de dispersion
- Définition et calcul des vitesses de phase et de groupe, des indices de réfraction et d'absorption
- Notion de paquet d'ondes, dispersion, absorption
- Définition et calcul des coefficients de réflexion et de transmission en amplitude ou en énergie
- Notion d'effet de peau et ordre de grandeur à 50 Hz ( $\delta(50 \text{ Hz}) \approx 7 \text{ mm}$ )