Développements limités

1 Rappels, formulaire

Dans ce chapitre, on désigne par $\mathbb{K}$ le corps des réels $\mathbb{R}$ ou celui des complexes $\mathbb{C}$. Des formules :

Dans ce qui suit, on entend par *voisinage de* x_0 un intervalle de la forme $]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$ où α est un certain réel strictement positif, si $\alpha>0$, un intervalle de la forme $]A,+\infty[$ si $x_0=+\infty$ ou bien un intervalle de la forme $]-\infty, a[$ si $x_0=-\infty$.

Définition 1. *Soit $f\colon I\to\mathbb{K}$ une fonction et $x_0\in I$ (ou $+\infty$, ou $-\infty$), on dit que g est **négligeable** par rapport à f en x_0 si et seulement si il existe V un voisinage de x_0 et $\varepsilon\colon I\cap V\to\mathbb{K}$ de limite nulle en x_0 tels que $\forall x\in I\cap V, g(x)=f(x)\,\varepsilon(x)$.*

On écrit, si tel est le cas, $g(x)\underset{x\to x_0}{=}o(f(x))$

*On dit que g est **dominée** par f en x_0 si et seulement si il existe V un voisinage de x_0 et $h\colon I\cap V\to\mathbb{K}$ bornée tels que, pour tout $x\in I\cap V$, $g(x)=f(x)\,h(x)$.*

On pourra noter alors $g(x)\underset{x\to x_0}{=}\mathcal{O}(f(x))$.

*On dira enfin de $f,g\colon I\to\mathbb{K}$ qu'elles sont **équivalentes** en x_0 et on écrira $f(x)\underset{x\to x_0}{\sim}g(x)$ si et seulement si il existe V un voisinage de x_0, $h\colon V\cap I\to\mathbb{K}$ de limite 1 en x_0 tels que $\forall x\in I\cap V, g(x)=f(x)\,h(x)$*

Proposition 2. *(composition) Si $\varphi\colon J\to I$ a pour limite x_0 en a et si $g(x)\underset{x\to x_0}{=}o(f(x))$, alors $g\circ\varphi(x)\underset{x\to a}{=}o(f\circ\varphi(x))$. Même résultat vis-à-vis de $\mathcal{O}$ et des fonctions équivalentes en x_0.*

Exemple 3. Supposons que $f(x)\underset{x\to 0}{=}x+x^2+o(x^3)$, alors, comme $x^2\xrightarrow[x\to 0]{}0$, on peut donc substituer x^2 à x dans l'expression précédente et écrire : $f(x^2)\underset{x\to 0}{=}x^2+x^4+o(x^6)$.

Attention : pour $x\to 0$, il serait absurde par exemple de remplacer ici x par $x+1$, car $x+1\underset{x\to 0}{\not\to}0$

Proposition 4. *(simplification dans les o et $\mathcal{O}$) On suppose que $\alpha>0$ et $f(x)\underset{x\to x_0}{\sim}\alpha\,g(x)$, alors pour toute fonction h, $h(x)\underset{x\to x_0}{=}o(f(x))$ si et seulement si $h(x)\underset{x\to x_0}{=}o(g(x))$, $h(x)\underset{x\to x_0}{=}\mathcal{O}(f(x))$ si et seulement $h(x)\underset{x\to x_0}{=}\mathcal{O}(g(x))$*

Exemple 5. Ainsi par exemple, en remarquant que $4\,x^2+x^3+x^7\underset{x\to 0}{\sim}4\,x^2$ plutôt que d'écrire $o(4\,x^2+x^3+x^7)$, on écrira plutôt (cela revient exactement au même) $o(x^2)$.

Définition 6. *On rappelle que si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, $f\colon I\to\mathbb{K}$ une fonction numérique ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $x_0\in I$, alors on dit que f admet un développement limité en x_0 à l'ordre n si et seulement si il existe $a_0,\ldots,a_n$ éléments de $\mathbb{K}$ (forcément uniques : unicité d'un DL) tels que, en notant $J=\{x-x_0|x\in I\}$:*

$$\forall h\in J, f(x_0+h)\underset{h\to 0}{=}a_0+a_1\cdot h+\cdots+a_n\cdot h^n+o(h^n)$$

(ou en d'autres termes, s'il existe $\varepsilon\colon J\to\mathbb{K}$ de limite nulle en 0 telle que $\forall h\in J, f(x_0+h)=a_0+a_1\cdot h+\cdots+a_n\cdot h^n+h^n\cdot\varepsilon(h)$.)

Proposition 7. *Soit $f\colon I\to\mathbb{K}$ et $x_0\in I$, alors f admet en x_0 un développement limité à l'ordre 0 si et seulement si f est continue en x_0, et un développement limité à l'ordre 1 si et seulement si f est dérivable en x_0.*

Remarque 8. L'exemple classique de $f\colon x\in\mathbb{R}\mapsto\begin{cases}x^3\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$ dont on remarque que $f(x)\underset{x\to 0}{=}o(x^2)$ ce qui indique que f admet, en 0, un développement limité à l'ordre 2, montre qu'on ne peut espérer, sous la forme d'une équivalence, aller plus loin. L'existence d'un développement limité à l'ordre 2 n'assure pas que f soit, au point concerné, deux fois dérivable.

Proposition 9. *(intégration d'un développement limité) Soit $f\colon I\to\mathbb{K}$ dérivable. On suppose que f' admet en x_0 le développement limité $f'(x_0+h)\underset{h\to 0}{=}a_0+a_1\cdot h+\cdots+a_n\cdot h^n+o(h^n)$. Alors f admet en x_0 le développement limité :*

$f(x_0+h)\underset{h\to 0}{=}f(x_0)+a_0\cdot h+a_1\frac{h^2}{2}+\cdots+a_n\cdot\frac{h^{n+1}}{n+1}+o(h^{n+1})$.

Théorème 10. *(Formule de Taylor-Young) Soit* $f: I \to \mathbb{K}$ *de classe* $\mathcal{C}^n$*, et soit* $x_0 \in I$*, alors* f *admet en* x_0 *un développement limité à l'ordre* n *donné par :*

$$f(x_0+h) \underset{h\to 0}{=} f(x_0) + h \cdot f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} \cdot f''(x_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!} \cdot f^{(n)}(x_0) + o(h^n)$$

Proposition 11. *Tous les développements limités qui suivent prennent du sens quand* $x \to 0$ *:*

- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^n + o(x^n)$
- $\frac{1}{1+x} = 1 - x + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$
- $\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$
- $\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
- $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$
- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$
- $\mathrm{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$
- $\mathrm{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$
- $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + o(x^6)$
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$
- $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2} x - \frac{1}{8} x^2 + o(x^2)$
- $\arcsin(x) = x + \frac{1}{6} x^3 + \frac{3}{40} x^5 + o(x^6)$

Exercice 1. Indiquer par quelle méthode retrouver chacun des développements précédents.

Proposition 12. *(règles de calcul avec les o) Si* $n < p$*, alors* $o(x^n) + o(x^p) \underset{x\to 0}{=} o(x^n)$

et $o(x^n) + o(x^p) \underset{x\to+\infty}{=} o(x^p)$ *(dans une somme, on garde le petit o le plus « défavorable »)*

$x^n\, o(x^p) = o(x^{n+p})$ et $o(x^{n+p}) = x^n\, o(x^p)$. Si $p > n$, $x^p \underset{x\to 0}{=} o(x^n)$, et $x^n \underset{x\to\infty}{=} o(x^p)$.

$o(x^n) \cdot o(x^p) = o(x^{n+p})$.

2 Quelques conseils

- **On ne dérive pas un développement limité !**

  On fera très attention au fait que si f admet en x_0 un développement limité à l'ordre n et est une fonction dérivable, rien ne permet a priori d'affirmer que f' en admette un à l'ordre $n-1$ au même point. En revanche, SI on sait que f' admet en x_0 un développement limité à l'ordre $n-1$ ET qu'on connaît un développement limité de f en x_0 à l'ordre n, ALORS le développement limité de f' en x_0 peut se déduire de celui de f...

- **Pour les calculs, on se ramène toujours à une variable qui tend vers 0.**

  Par exemple, pour calculer un développement limité de f en 1, on calculera $f(1+h)$.

- **Un D.L. n'a de sens qu'au voisinage du point où il est calculé**

  Un développement limité de f en x_0 peut nous aider à décider de sa limite, de sa dérivabilité en x_0, de la position locale de la courbe représentative de f et de sa tangente en x_0, mais en aucun cas cela ne nous éclaire sur le comportement de f ailleurs (où que ce soit…)

- **Ne jamais développer les termes de la forme $(x-x_0)^n$**

  Je ne recommande pas cette écriture, mais il arrive qu'un développement limité soit écrit, ou attendu, sous la forme : $f(x) \underset{x\to x_0}{=} a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$.

  Il convient alors de ne surtout pas développer les puissances $(x-x_0)^n$ faisant de cette expression quelque chose d'inutilisable : on voit que a_0 est la valeur de f en x_0, a_1 son nombre dérivé en x_0 (on ne peut aller plus loin), tandis que la constante obtenue en développant les termes de l'expression présentée est vide de sens $(a_0 - a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots)$

  Bref, pour éviter ce genre de bêtise, la solution est facile : privilégiez des écritures de DL sous la forme $f(x_0+h) = \cdots$ (autrement dit, avec une variable h qui tend vers 0)

- **Attention au lien avec les dérivées ultérieures**

  Comme rappelé, l'existence d'une dérivée n-ième assure l'existence d'un développement limité à l'ordre n, mais la réciproque est fausse à partir de l'ordre 2.

- **Attention à la composition des D.L.** : ne pas oublier que tous les développements limités usuels n'ont de sens qu'en 0, et qu'on ne peut donc substituer à la variable qu'une expression de limite nulle.

  Exemple : pour calculer un D.L. de $x \mapsto \frac{1}{1+\exp(x)}$ en 0 à l'ordre 2, alors commencer par écrire que $\frac{1}{1+X} \underset{X\to 0}{=} 1 - X + X^2 + o(X^2)$ est vain, car on va substituer à X l'expression $\exp(x)$ qui ne tend pas vers 0 lorsque $x \to 0$.

  La bonne démarche est alors ici de développer d'abord au dénominateur l'exponentielle à l'ordre 2 : $\frac{1}{2+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)}$ et ensuite de factoriser au dénominateur par 2, faisant apparaître $1+X$ où $X = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + o(x^2)$ tend bien vers 0 quand $x \to 0$. Et alors seulement, on peut faire appel au D.L. de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ et substituer à la variable x l'expression $X = \cdots$ ci-dessus.

3 Applications et exercices

3.1 Equivalents

Connaissant un D.L. de f en x_0, on rappelle que la **partie principale** du D.L., à savoir le premier terme non nul (celui de plus petite puissance donc) donne immédiatement un équivalent simple de f.

Exemple 13. Déterminer un équivalent simple de $\frac{\sin x - x}{x}$ quand $x \underset{\neq}{\to} 0$

Exercice 2. Calculer un équivalent de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e$ quand $n \to +\infty$

3.2 Calcul de limites, prolongement de fonctions

Sans surprise, le calcul d'un développement limité permet d'obtenir la limite d'une fonction en un point adhérent à son domaine de définition (par exemple en 0 pour une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$). L'ordre 0 suffit pour déterminer une limite finie et donc un éventuel prolongement par continuité. Si on va jusqu'à l'ordre 1, on pourra du même coup justifier la dérivabilité de la fonction ainsi prolongée. Attention : l'ordre 2 ne montre pas l'existence d'une dérivée seconde, mais un développement à un tel ordre n'est pas forcément inutile, et il nous permet de préciser la position locale d'une courbe et de sa tangente.

Exercice 3. Montrer que $f : x \mapsto \left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{4}{x}}$ définie sur $]-1,0[\cup]0,+\infty[$ se prolonge par continuité en 0 et que la fonction ainsi obtenue est dérivable en 0. Tracer alors au voisinage du point d'abscisse 0 l'allure de la courbe représentative de f.

3.3 Etude de branches infinies

Exercice 4. Etudier la branche infinie quand $x \to +\infty$ de $f(x) = (x+1)\exp\left(\frac{1}{x-1}\right)$.

3.4 Exercices en vrac

Exercice 5. (Banque Oral CCINP MP)

1. On considère deux suites de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang et $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.

   Démontrer que (u_n) et (v_n) sont de même signe à partir d'un certain rang.

2. Déterminer le signe, au voisinage de l'infini, de $u_n = \mathrm{sh}\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 6. Calculer les développements limités suivants :

1. $f(x) = \exp(\cos(x))$ en 0 à l'ordre 5
2. $f(x) = e^{e^{\mathrm{i}x}}$ en 0 à l'ordre 3
3. $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ en 1 à l'ordre 4
4. $f(x) = x - \frac{3\sin(x)}{2+\cos(x)}$ en 0 à l'ordre 4
5. $f(x) = \arctan\left(\frac{2\,(1-x)}{1+4\,x}\right)$ en 0 à l'ordre 4 (indication : ne pouvant utiliser directement un développement limité de arctan (l'argument de l'arc-tangente ne tend pas vers 0), on pourra calculer d'abord la dérivée de f, calculer un développement limité de celle-ci, puis l'intégrer)

Solution.

1. $f(x) \underset{x\to 0}{=} e\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + o(x^5)\right)$
2. $f(x) \underset{x\to 0}{=} e\left(1 + \mathrm{i}\,x - x^2 - \frac{5}{6}\,\mathrm{i}\,x^3 + o(x^3)\right)$
3. $f(1+h) \underset{h\to 0}{=} h - \frac{3}{2}\,h^2 + \frac{11}{6}\,h^3 - \frac{25}{12}\,h^4 + o(h^4)$
4. $f(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^4)$ (si si ! mais bien sûr, cela ne montre en rien que f soit identiquement nulle au voisinage de 0…)
5. $f(x) \underset{x\to 0}{=} \arctan(2) - 2\,x + \frac{8}{3}\,x^3 + o(x^4)$

Exercice 7. Montrer que $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ qui à $x \neq 0$ associe $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\arctan(x)^2}$ admet un prolongement par continuité en 0, et tracer l'allure locale de la fonction ainsi obtenue, au voisinage de 0.

Exercice 8. Soient $a > 0$ et $b > 0$, déterminer la limite quand $x \to 0^+$ de $\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$

Exercice 9. Justifier que $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R},\, f(x) = x + \sin x$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et que sa bijection réciproque, qu'on notera g, admet en 0 un développement limité de tout ordre.
Calculer le développement limité de g en 0 à l'ordre 6.

Exercice 10. Déterminer un développement asymptotique, à la précision $\frac{1}{x^3}$ de $f : x \mapsto x\ln(x+1) - (x+1)\ln x$. (quand $x \to +\infty$)

Exercice 11. (Centrale)

a) Soit $n \geqslant 2$ un entier. Montrer que l'équation $x^n = x + 1$ possède une unique solution sur $\mathbb{R}^{+*}$, que l'on note x_n.

b) Montrer que $x_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ lorsque $n \to +\infty$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ que l'on déterminera.

Exercice 12. (Centrale-Python) Soit (E_n) l'équation $x^n = e^x$ pour un entier $n \geqslant 3$.

a) Montrer que (E_n) possède une unique solution x_n dans $[0, n]$. Justifier de plus que $1 < x_n < 2$.

b) Conjecturer quelle est la limite de (x_n).

c) Montrer l'existence de $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x_n = 1 + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

d) Montrer que (E_n) possède également une unique solution $y_n \in [n, +\infty[$. Déterminer un développement asymptotique de y_n.