TD Électrostatique

1. Champ créé par un carré formé par 4 charges ponctuelles

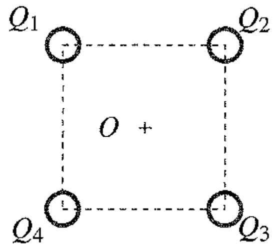
Quatre charges ponctuelles sont situées aux sommets d'un carré de centre O, de coté $2a$.

Elles portent les charges (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4). A l'aide du logiciel à l'adresse et QR code suivant :

https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Elec/Champs/lignes_champE.php

tracer la cartes des lignes de champ et des équipotentielles pour les valeurs de charge suivantes :

$$(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) = (1; 1; 1; 1)\ ; (-1; 1;\ -1; 1); (-1;\ -1; 1; 1;)\ ; (1; 2; 1; 2)$$



Dans chacun des cas répondre aux questions suivantes :

1. Quels sont les plans de symétrie et d'antisymétrie ?

2. Que peut-on dire du champ au centre ?

3. Y a-t-il des points où le champ est nul ?

4. Commenter les cartes de lignes de champ et des équipotentielles.

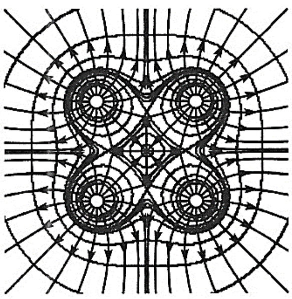


Figure 11.27 – Cas (a) : (1 : 1 : 1 : 1)

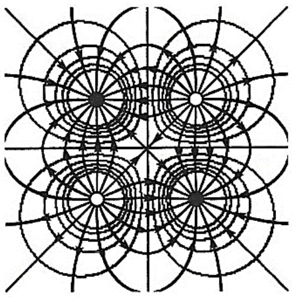


Figure 11.28 – Cas (b) : (-1 : 1 : -1 : 1)

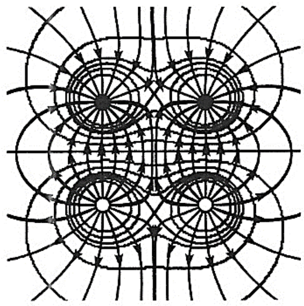


Figure 11.29 – Cas (c) : (-1 : -1 : 1 : 1)

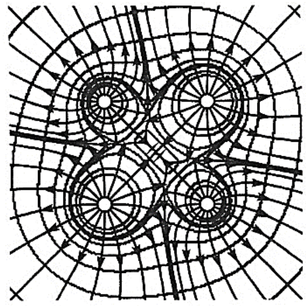
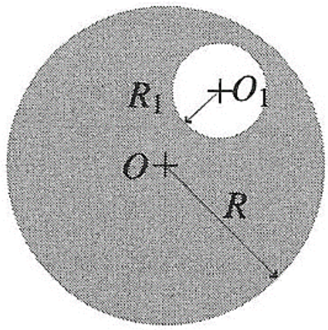


Figure 11.30 – Cas (d) : (1 : 2 : 1 : 2)

2. Grotte sphérique



Une cavité sphérique de centre O_1 est creusée à l'intérieur d'un astre sphérique homogène de centre O et de masse volumique ρ.

Déterminer le champ gravitationnel dans la cavité à l'aide du théorème de superposition et du théorème de Gauss.

3. Distribution plane d'épaisseur finie

Entre deux plans d'équation $z = \dfrac{a}{2}$ et $z = -\dfrac{a}{2}$ se trouve une distribution volumique de charge uniforme ρ_0.

1. Grâce aux invariances et symétries, montrer que le champ électrique s'écrit sous la forme : $\vec{E}(M) = E(z)\vec{u}_z$

2. Montrer que le champ est nul sur le plan xOy.

3. Calculer le champ électrique en tout point M et tracer le graphe de $E(z)$.

4. Calculer le potentiel électrique $V(M)$.

5. On envisage pour l'épaisseur a le passage à la limite vers zéro, la densité surfacique de charge σ_0 restant constante.

a) Déterminer σ_0 en fonction de ρ_0 et a.

b) Préciser la valeur du champ dans chaque demi-espace $z > 0$ et $z < 0$.

c) Que devient le graphe de $E(z)$? Comparer aux résultats pour une distribution surfacique (cours).

4. Atome d'hydrogène

L'atome d'hydrogène, dans son état fondamental, est équivalent à une distribution de charges qui crée un potentiel dont l'expression en **coordonnées sphériques** est :

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(1 + \frac{r}{a}\right)\exp\left(-\frac{2r}{a}\right)$$

où q et a sont positifs.

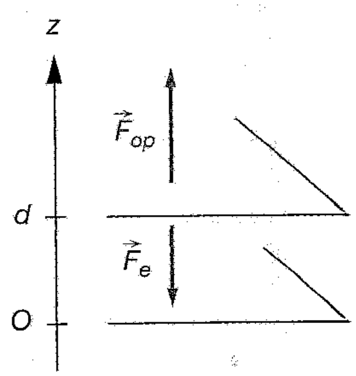
1. Déterminer la charge $Q(r)$ comprise dans la sphère de rayon r et de centre O.

2. Caractériser la distribution de charge à la source du potentiel et vérifier la compatibilité avec l'atome d'hydrogène.

3. Étudier et représenter la densité radiale de charge $f(r) = \frac{dQ}{dr}$, calculer le rayon r_m du maximum. Interpréter.

4. On définit l'énergie de liaison comme l'énergie à fournir pour casser le système et éloigner les constituants à l'infini. Le potentiel de l'électron est : $V_e(r_m) = V(r_m) - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_m}$, exprimer cette énergie pour l'atome d'hydrogène.

5. Bilan d'énergie dans un condensateur



1. On considère un condensateur plan de section *S* d'écartement *d* selon *Oz*. Montrer qu'il existe une force électrostatique exercée par l'armature inférieure sur l'armature supérieure. Commenter sa direction et son sens.

2. L'armature inférieure est fixe, sa cote est choisie nulle. Un opérateur écarte l'armature supérieure en exerçant une force $\vec{F}_{op}$ colinéaire à $\vec{u}_z$. Quelle est l'intensité de cette force pour compenser l'énergie électrostatique ?

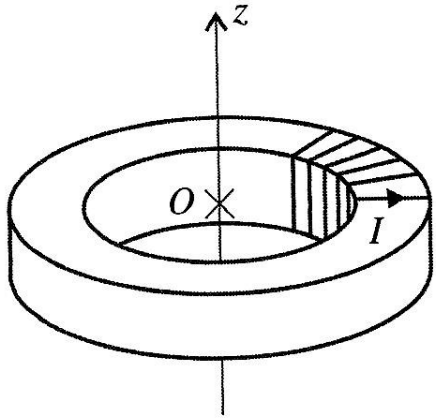
3. L'opération se fait à charge constante (isolation électrique des armatures), la distance entre les armatures passe de d_1 à d_2. Quel est le travail de la force exercée par l'opérateur durant la transformation ?

4. Par un bilan énergétique, retrouver l'expression de l'énergie électrique emmagasinée dans le condensateur.

TD Magnétostatique et distributions dipolaires

Magnétostatique

1. Bobine torique



On considère un tore d'axe *(Oz)* de rayon moyen R à section carré de côté a. On réalise une bobine en enroulant un fil sur le tore en N spires jointives parcourues par un courant d'intensité I.

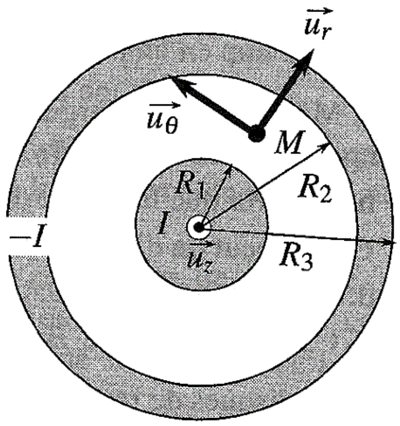
1. Calculer le champ magnétique créé en tout point de l'espace à l'aide du théorème de d'Ampère.

2. Calculer le flux du champ magnétique à travers la surface d'une spire dans le plan *(Oxz)*.

3. On désigne respectivement par $B_{\min}, B_{\max}\ et\ B_{\text{moy}} = B(R)$, les valeurs minimum, maximum et moyenne du champ à l'intérieur de la bobine. Calculer la valeur numérique du rapport a/R pour une variation relative du champ de :

$$\frac{B_{\max} - B_{\min}}{B_{\text{moy}}} = 10\%$$

2. Câble coaxial



On considère un câble coaxial cylindrique de longueur infini, constitué d'un conducteur central plein de rayon R_1, parcouru par un courant uniforme d'intensité I et d'un conducteur périphérique évidé, de rayon intérieur R_2, de rayon extérieur R_3 avec $R_1 < R_2 < R_3$ et parcouru par un courant uniforme d'intensité I circulant en sens inverse par rapport au courant du conducteur central.

1. Montrer que le champ magnétique peut se mettre sous la forme $\vec{B} = B(r)\vec{u}_\theta$ et préciser la forme des lignes de champ.

2. Montrer que le champ magnétique est nul si $r > R_3$.
Expliquer alors l'intérêt du câble coaxial par rapport à un fil simple parcouru par un courant de même intensité.

3. Calculer les densités de courant $\vec{J_1}$ et $\vec{J_2}$ du conducteur central et du conducteur périphérique en fonction des courants I_1 et I_2 et des rayons R_1, R_2 et R_3.

4. En appliquant le théorème d'Ampère, donner l'expression du champ magnétique pour tout point M de l'espace en fonction de μ_0, I, r, R_1, R_2 et R_3.
Vérifier que le champ est continu en $r = R_1$ et en $r = R_2$ et tracer le graphe de $B(r)$.

3. Tige cylindrique chargée en rotation

Un cylindre d'axe *(Oz)*, de longueur ℓ et de rayon a est uniformément chargé avec une densité volumique de charge ρ_0 uniforme. La tige est en rotation à la vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \omega_0\, \vec{u}_z$ constante autour de son axe dans le référentiel du laboratoire.

1. Faire un schéma de la situation et choisir un repérage adapté.

2. Montrer que la tige crée un champ magnétique $\vec{B}(M)$ en tout point de l'espace.

3. Étudier le champ $\vec{B}(M)$ créé par la tige loin de ses extrémités, en effectuant des approximations.

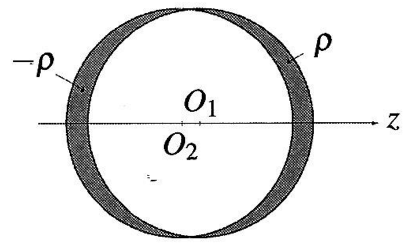
Distributions dipolaires

1. Deux sphères de charges opposées

Deux sphères de centre O_1 et O_2, de même rayon R, sont chargées uniformément en volume avec des densités volumiques de charges opposées $+\rho$ et $-\rho$. Leurs centres sont décalés de a. On considère $\overrightarrow{O_1O_2} = a\,\vec{u}_z$ avec $a \ll R$.

1. Déterminer le champ électrostatique dans tout l'espace intérieur et dans tout l'espace extérieur aux deux sphères (les zones intérieures à une seule sphère seront négligées car trop petites)

2. Montrer que l'on peut définir un moment dipolaire $\vec{p}$ pour l'ensemble tel que le champ à l'extérieur soit égal à celui que crée ce dipôle.



2. Cristal de NaCl soumis à un champ

L'application d'un champ électrique à un monocristal de chlorure de sodium se traduit par des déplacements des ions qui le composent.

Soit $\vec{E} = E_0\,\vec{u}_x$ le champ électrostatique imposé aux ions du cristal, en appliquant une tension à des électrodes planes plaquées sur les faces opposées d'un échantillon parallélépipédique. Sous l'effet de ce champ, les ions Na^+ se déplace en bloc de δ_{Na} selon $\vec{u}_x$ et les ions Cl^- de δ_{Cl}, le centre de masse de l'ensemble restant immobile.
On posera $x = \delta_{Na} - \delta_{Cl}$.

Avant tout déplacement, le moment dipolaire global du cristal est nul par symétrie. On note N le nombre d'ions sodium et chlorure par unité de volume et e la charge élémentaire.

1. Montrer que ces déplacements ioniques se traduisent par un moment dipolaire réparti dans le volume du cristal, de densité volumique $\vec{P} = P\,\vec{u}_x$ et exprimer P en fonction de e, x et N.

2. a. L'expérience montre que la relation entre P et E est linéaire de la forme $P = \varepsilon_0\,\chi_{\text{ion}}E$ où χ_{ion} est un coefficient positif caractéristique du cristal. En déduire que le groupe d'ions Na^+ est soumis à des forces de rappel élastique dont la moyenne par ion est de la forme $\vec{f} = -Kx\vec{u}_x$, les ions Cl^- étant soumis à des forces opposées.

b. Exprimer la constante K en fonction de N, e, ε_0 et χ_{ion}.

3. a. Après suppression du champ $\vec{E}$, les deux groupes d'ions évoluent librement. Écrire l'équation du mouvement d'un ion Na^+ et celle d'un ion Cl^- ; on désignera par m_{Na} et m_{Cl} leurs masses respectives.

b. À l'aide des équations vérifiées par $x_G = \dfrac{m_{Na}\delta_{Na} + m_{Cl}\delta_{Cl}}{m_{Na} + m_{Cl}}$ et $x = \delta_{Na} - \delta_{Cl}$ montrer que le mouvement relatif des deux ions est une oscillation à une pulsation ω_T que l'on explicitera en fonction de $N, e, \varepsilon_0, \chi_{\text{ion}}, m_{Na}$ et m_{Cl}.

3. Précession d'une particule dans un champ magnétique

On reprend le modèle planétaire pour un atome permettant d'établir une proportionnalité entre le moment cinétique propre $\vec{L}_O$ et son moment magnétique $\vec{m} = \gamma\,\vec{L}_O$. On désire décrire le comportement d'une particule lorsqu'elle est plongée dans un champ magnétique uniforme et stationnaire $\vec{B}$ (les applications possibles : imagerie médicale par RMN, définition de référence de temps …)

1. Quelle équation de la mécanique est adaptée à cette étude ? En déduire une équation différentielle vectorielle régissant l'évolution de $\vec{m}$.

2. À l'instant initial, le moment dipolaire magnétique fait un angle α connu avec le champ magnétique extérieur. Décrire le mouvement observé.

3. Que peut-on dire de l'énergie potentielle d'interaction entre le moment dipolaire et le champ magnétique extérieur au cours de ce mouvement ?

4. Quel système mécanique macroscopique décrit un mouvement identique dans un champ de pesanteur uniforme ?

5. Comment peut-on lever ce paradoxe : la boussole s'aligne sur le champ magnétique, alors que la particule maintient un angle constant ?