**Programme de colles mathématiques PC**

**Semaine 5 du 9/10 au 13/10**

# 1 Révision d'analyse :

Encore un peu de séries numériques.

Séries absolument convergentes, critère de Riemann. Règle de d'Alembert.

Séries alternées, produit de Cauchy de séries absolument convergentes.

- Exercice type : Césaro (voir au dos pour une rédaction possible)

# 2 Révisions d'algèbre

Espaces vectoriels. Sous-espace vectoriel. Espace vectoriel engendré par une partie, par une famille. Famille libre, famille génératrice. Espaces de dimension finie et bases. Sommes de sous-espaces. Espaces en somme directe (2 et plus), espaces supplémentaires et caractérisations.

Applications linéaires. Image directe et réciproque d'un espace vectoriel, image et noyau et lien avec l'injectivité et la surjectivité. Hyperplans.

Matrices, structure, interprétation matricielle d'une application, matrices carrées, inversibles, matrices de passage et formules de changement de base. Image, noyau et rang d'une matrice. Matrices définies par blocs.

Déterminants : déterminant d'une famille de vecteurs selon une base, d'un endomorphisme, d'une matrice carrée. Opérations élémentaires sur les lignes et colonnes, déterminant par blocs, déterminant de Vandermonde.

Polynômes : degré d'un polynôme, degrés étagés, racines simples et multiples, relations entre coefficients et racines pour un polynôme scindé (somme et produit des racines seulement), polynômes irréductibles, cas des polynômes réels et complexes.

Polynômes interpolateurs de Lagrange, formule du binôme et application au calcul des polynômes de Tchebychev.

Questions de cours :

- Déterminant de Vandermonde
- Enoncé des formules donnant, pour $P(X)=a_n X^n+\cdots+a_0$ un polynôme scindé de racines $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ (non supposées 2 à 2 distinctes) les expressions de $\sum \lambda_k$ et $\prod \lambda_k$ en fonction des coefficients du polynôme $P$.
- Etant donnés $(a_0,\cdots,a_n)$ éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts, explicitation des polynômes $L_0,\cdots,L_n$ tels que pour tout $(i,j), L_i(a_j)=\delta_{i,j}$ et expression du polynôme interpolateur de Lagrange relatif aux points $(a_k,b_k)$ à l'aide des $L_k$. (Voir au verso si nécessaire)

# 3 Réduction (début)

Valeurs et vecteurs propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée, polynôme caractéristique d'une matrice, d'un endomorphisme. Polynôme annulateur d'un endomorphisme, d'une matrice carrée.

Questions de cours :

- Si $u$ et $v$ commutent, alors les espaces propres de $u$ sont stables par $v$.
- Si $P$ annule $u$ et $\lambda$ est une valeur propre de $u$, alors $\lambda$ est une racine de $P$. (P.24)

**Exercice.** Sommes de Césaro : soit $(u_n)$ une suite convergente de limite $l$, et on pose pour tout $n$, $v_n = \frac{u_0 + \cdots + u_n}{n+1}$. Montrer que $(v_n)$ converge vers $l$.

**Solution.** On traite d'abord le cas où $l = 0$ : on suppose donc que $(u_n)$ converge vers 0, et soit $\varepsilon > 0$, alors comme $(u_n)$ converge vers 0, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N, |u_n| < \varepsilon$. Mais alors, pour tout $n \geqslant N$,

$$|v_n| = \frac{|u_0 + \cdots + u_n|}{n+1} \leqslant \frac{|u_0| + \cdots + |u_n|}{n+1} \leqslant \frac{|u_0| + \cdots + |u_N|}{n+1} + (n - N)\frac{\varepsilon}{n+1} \leqslant \frac{|u_0| + \cdots + |u_N|}{n+1} + \varepsilon$$

de plus $\frac{|u_0| + \cdots + |u_N|}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N', \frac{|u_0| + \cdots + |u_N|}{n+1} < \varepsilon$.

Ainsi, pour tout $n \geqslant \max(N, N')$, $|v_n| \leqslant 2\,\varepsilon$ et ceci montre que $(v_n)$ converge vers 0.

Traitons maintenant le cas général : on suppose désormais que $(u_n)$ converge vers $l$, alors

$$v_n - l = \frac{u_0 + \cdots + u_n}{n+1} - l = \frac{u_0 - l + \cdots + u_n - l}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

car la suite $(u_n - l)$ converge vers 0, étant alors ramené au cas précédent.

**Remarque 1.** Expression du polynôme interpolateur de Lagrange relatif aux $(a_k, b_k)$ : vu les valeurs prises par les polynômes $L_0, \cdots, L_n$, alors le polynôme $b_0\,L_0 + \cdots + b_n\,L_n$ prend pour valeur, en $a_k$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$, $b_k$.

De plus, $d(b_0\,L_0 + \cdots + b_n\,L_n) \leqslant n$ et ainsi on a reconnu, sous la forme de $b_0\,L_0 + \cdots + b_n\,L_n$, le polynôme interpolateur de Lagrange en les $(a_k, b_k)$.