

$(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ base de E

$$u^n(x) = -a_0 x + \dots + (-u^{n-1}(x))$$

$\downarrow$

$$\chi_u = X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$$

$$\text{et } \chi_u(u) = 0$$

$$\chi_u(u)(x) = u^n(x) + a_{n-1} u^{n-1}(x) + \dots + a_1 u(x) + a_0 x$$

$$\begin{aligned} \chi_u(u)(u(x)) &= u^n(u(x)) + \dots + a_1 u(u(x)) + a_0 u(x) \\ &= u(u^n(x)) + \dots + a_1 u(u(x)) + a_0 u(x) \\ &= u(u^n(x) + \dots + a_1 u(x) + a_0 x) = u(0) \\ &= 0. \quad \square \end{aligned}$$

Th. 29 $\square$ Soit $u \in L_K(E)$ et soit $x \in E$, on suppose $x \neq 0$.

et soit $p \in \mathbb{N}^*$ tq $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ est libre

et $(x, u(x), \dots, u^p(x))$ est liée.

$$\text{On pose } F = \text{Vect}(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$$

alors F est stable par u .

on note u_F l'endomorphisme induit.

u_F est alors cyclique et donc $\chi_{u_F}(u_F) = 0$

$$\text{en particulier } \chi_{u_F}(u)(x) = 0$$

De plus, on sait que (prop. 19) χ_{u_F} divise χ_u

donc, en notant Q tq $\chi_u = Q \times \chi_{u_F}$

$$\text{on a } \chi_u(u) = Q(u) \circ \chi_{u_F}(u)$$

$$\text{et } \chi_u(u)(x) = Q(u) \left(\underbrace{\chi_{u_F}(u)(x)}_{=0} \right) = 0$$

$$\text{Ainsi: } \boxed{\chi_u(u) = 0} \quad \square$$

$$\text{Mat}_{(e_1, \dots, e_n)}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

D.30 $\llcorner$ S'il existe une base de vecteurs propres de E ,

$$\text{alors } E_{\lambda_1} + \dots + E_{\lambda_p} = E$$

(en effet, si $x \in E$, alors x est une combinaison linéaire de vecteurs propres et donc aussi une somme de vecteurs propres de u)

De plus on sait que $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_p}$ sont en somme directe donc $E = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}$.

Si réciproquement $E = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}$ alors, on obtient une base de E formée de vecteurs propres de u en réunissant les vecteurs d'une base de $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, \dots, E_{\lambda_p}$.

Enfin, sachant $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_p}$ en somme directe, alors

$$E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p} = E \text{ ssi } \sum_{i=1}^p \dim(E_{\lambda_i}) = \dim E = n$$

Symétrie d'un F et de direction G :

$$E = F \oplus G$$

$$x = y + z$$

$$\text{alors } s(x) = y - z, \quad F = \{x \in E \mid s(x) = x\}$$

$$\text{et } G = \{x \in E \mid s(x) = -x\}.$$

P.33 $\llcorner$ Supposons u diagonalisable, alors il existe B' une base de E tq $\text{Mat}_{B'}(u) = D$ est diagonale.

Or, d'après la formule de changement de base :

$$A = P_{B \rightarrow B'} D (P_{B \rightarrow B'})^{-1}$$

et ainsi A est diagonalisable.

Supposons maintenant A diagonalisable.

alors il existe P inversible et D diagonale tq

$$A = P D P^{-1}.$$

Si on note B' la famille de E dont P est la matrice selon la base B , alors, comme P est inversible, B' est une base de E .

Mais alors $D = P_{B' \rightarrow B} A P_{B \rightarrow B'}$ est la matrice de u selon B' , ce qui montre que u est diagonalisable.]

P.34 [Si on note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres (distinctes) de u alors il s'agit, on le sait, des racines de χ_u .

De plus, on a vu que pour toute valeur propre λ ,

$$1 \leq \dim E_\lambda(u) \leq m(\lambda)$$

Ainsi, u est diagonalisable ssi $\underbrace{\dim E_{\lambda_1}(u) + \dots + \dim E_{\lambda_p}(u)}_{\leq m(\lambda_1) + \dots + m(\lambda_p)} = n$

or $m(\lambda_1) + \dots + m(\lambda_p) \leq n$ (degré de χ_u)

Ainsi, u est diagonalisable ssi

$$\begin{cases} m(\lambda_1) + \dots + m(\lambda_p) = n \\ \text{et } \dim E_{\lambda_1}(u) = m(\lambda_1) \text{ et } \dots \text{ et } \dim E_{\lambda_p}(u) = m(\lambda_p). \end{cases} \quad \text{II}$$

Exercice 2

[$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ alors

$$\forall X \in \mathbb{R}, \quad \chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-2 & -1 \\ -1 & X-2 \end{vmatrix} = (X-2)^2 - 1 \\ = (X-3)(X-1)$$

On sait d'aj qu A est diagonalisable (deux valeurs propres qui conduisent à une base de vecteurs propres)

* Détermination d'une base de vecteurs propres :

$$A - 3I_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et on voit que } (A - 3I_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A - I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } (A - I_2) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{On pose alors } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{et on a alors } A = P D P^{-1}.$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{rg } A = 1 \text{ et ainsi } 0 \text{ est une valeur propre de } A \text{ et son espace propre associé, Ker } A \text{ a pour dimension } 2.$$

$$(\text{Une base de Ker } A = E_0(A) \text{ est } \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right))$$

$$\text{Puis } A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ On vient alors de trouver une base de vecteurs propres de } A.$$

$$A \text{ est donc diagonalisable et s'écrit } P D P^{-1}$$

$$\text{où } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$3. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ alors } \chi_A(X) = (X-1)^2.$$

× Détermination de $E_1(A)$:

$$A - I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Ici, } E_1(A) = \text{Ker}(A - I_2) \text{ est une droite vectorielle :}$$

$$\underbrace{\dim E_1(A)}_{=1} < \underbrace{m(1)}_{=2}$$

Ainsi A n'est PAS diagonalisable.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(X) = (X-1)(X-2)(X-3)(X-4)(X-5)$$

5 valeurs propres dont on déduit une base de vecteurs propres : A est donc diagonalisable.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \chi_A(X) = X^2 + 1$$

Sur $\mathbb{R}$, A n'est pas diagonalisable car χ_A n'est pas scindé.

Sur $\mathbb{C}$, $\chi_A(X) = (X-i)(X+i)$ et A est alors diagonalisable.

(un vecteur propre associé à i et un vecteur propre associé à $-i$ forment une base).

$$A - iI_2 = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (A - iI_2) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(A + iI_2) \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc, en notant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$

on a $A = P D P^{-1}$. $\square$

Exercice 3. $\square$ A étant de rang 1 (on suppose $n \geq 2$)

alors 0 est une valeur propre de A et

$$\dim E_0(A) = \dim \ker A = n-1.$$

Si X est un vecteur propre associé à une valeur propre

$$\lambda \neq 0 \quad \text{alors} \quad X = A \left(\frac{1}{\lambda} X \right) \in \text{Im } A$$

En notant $C \neq 0$ élt de $\text{Im } A$, et $C_1, \dots, C_n$ les vecteurs colonnes de A , alors il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ élt de K tq

$$\forall i, C_i = \alpha_i \cdot C.$$

(On peut d'ailleurs remarquer que $A = C \times (\alpha_1 \dots \alpha_n)$)

Si A admet une valeur propre $\lambda \neq 0$, alors C en est un vecteur propre associé et donc

$$AC = \lambda C = C \underbrace{\alpha_1 \dots \alpha_n}_{=1} C_1$$

$$\text{en posant } C = \begin{pmatrix} x_1 \\ | \\ x_n \end{pmatrix} \quad (\alpha_1 \dots \alpha_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ | \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \underbrace{\alpha_i \cdot x_i}_{=a_i, i} = \text{Tr } A$$

$$\text{On a donc } \boxed{AC = \text{Tr } A \cdot C} \quad (\text{toujours})$$

On en déduit que A est diagonalisable si, et seulement si, $\text{Tr } A \neq 0$.

Autre angle : On peut remarquer que χ_A est scindé.

0 est valeur propre de A et $\dim E_0(A) = n-1$

comme $1 \leq \dim E_0(A) \leq m(0)$

alors la multiplicité de 0 comme valeur propre de A vaut donc $n-1$ ou n .

χ^{n-1} divise donc $\chi_A(x)$

($\chi_A(x)$ s'écrit donc $\chi^{n-1}(x-\lambda)$ où $\lambda \in \mathbb{K}$)

On sait donc, χ_A étant scindé, que

$$\text{Tr } A = (n-1) \times 0 + \lambda = \lambda.$$

A est alors diagonalisable si $\lambda \neq 0$

ssi $\text{Tr } A \neq 0$.]

Th. 35 [Si u est diagonalisable,

alors il existe B une base de E $\mathbb{K}$

$\text{Mat}_B(u)$ soit diagonale. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres (distinctes), alors on remarque que

$(X-\lambda_1) \dots (X-\lambda_p)$ annule u .

Si réciproquement il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ $2 \leq 2$ distinctes $\mathbb{K}$

$(X-\lambda_1) \dots (X-\lambda_p)$ annule u .

On note, pour $1 \leq i \leq p$, $L_i(x) = \prod_{k \neq i} \frac{(x-\lambda_k)}{(\lambda_i-\lambda_k)}$

On rappelle que $L_1 + \dots + L_p = 1$

et ainsi $L_1(u) + \dots + L_p(u) = \text{Id}_E$

Soit $x \in E$, alors

$$x = L_1(u)(x) + \dots + L_p(u)(x)$$

on remarque que pour $1 \leq i \leq p$,

$$L_i(u)(x) \in \ker(u - \lambda_i \text{Id}_E)$$

en effet $(u - \lambda_i \text{Id}_E)(L_i(u)(x))$

$$= \frac{1}{\prod_{k \neq i} (\lambda_i - \lambda_k)} (u - \lambda_i \text{Id}_E) \circ (u - \lambda_1 \text{Id}_E) \circ \dots \circ (u - \lambda_p \text{Id}_E)(x)$$

Tous sauf " i "

ceci est l'endomorphisme nul

car $(X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_p)$ annule u .

En d'autres termes : $L_i(u)(x) \in E_{\lambda_i}(u)$

$$\text{et } x \in \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(u)$$

$$\text{ce qui montre que } E = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(u) \quad \square$$

36] [u étant diagonalisable alors il existe P un polynôme annulateur de u scindé à racines simples.

En notant u_P l'endomorphisme de E qui induit u , alors P annule encore u_P , donc u_P est encore diagonalisable.]

37] [Dans un sens, on l'a vu (première partie de 35) :

si u est diagonalisable de valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ alors $(X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_p)$ annule u .

La réciproque est montrée grâce au th 35)]

Exercice 4] [u étant diagonalisable alors, en notant $\lambda_1, \dots, \lambda_p$

les valeurs propres (distinctes) de u on sait que

$$E = E_{\lambda_1}(u) \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}(u)$$

De plus, comme u et v commutent, alors pour $1 \leq k \leq p$,

$E_{\lambda_k}(u)$ est stable par v

De plus, v étant diagonalisable, l'endomorphisme de $E_{\lambda_k}(u)$ qu'il induit est encore diagonalisable, si bien qu'il existe une base de $E_{\lambda_k}(u)$ formée de vecteurs propres de v .

En réunissant ces bases pour $1 \leq k \leq p$, on obtient une base de E formée de vecteurs propres pour u comme pour v . $\square$

Retour sur le DM :

$$S_1: \begin{cases} x'_1 = -4x_1 + 3x_2 \\ x'_2 = -6x_1 + 5x_2 \end{cases}$$

Étant donnée (x_1, x_2) un couple de fns dérivables, on note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ (X est vu comme une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ dérivable)

On note $A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$ dont le polynôme caractéristique est $X^2 - X - 2 = (X+1)(X-2)$

$$A + I_2 = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} \text{ donc } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_{-1}(A)$$

$$A - 2I_2 = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \text{ donc } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in E_2(A)$$

Ainsi, en posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

on a $A = PDP^{-1}$.

$$\begin{aligned} \text{On pose alors } Y = P^{-1}X &= \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

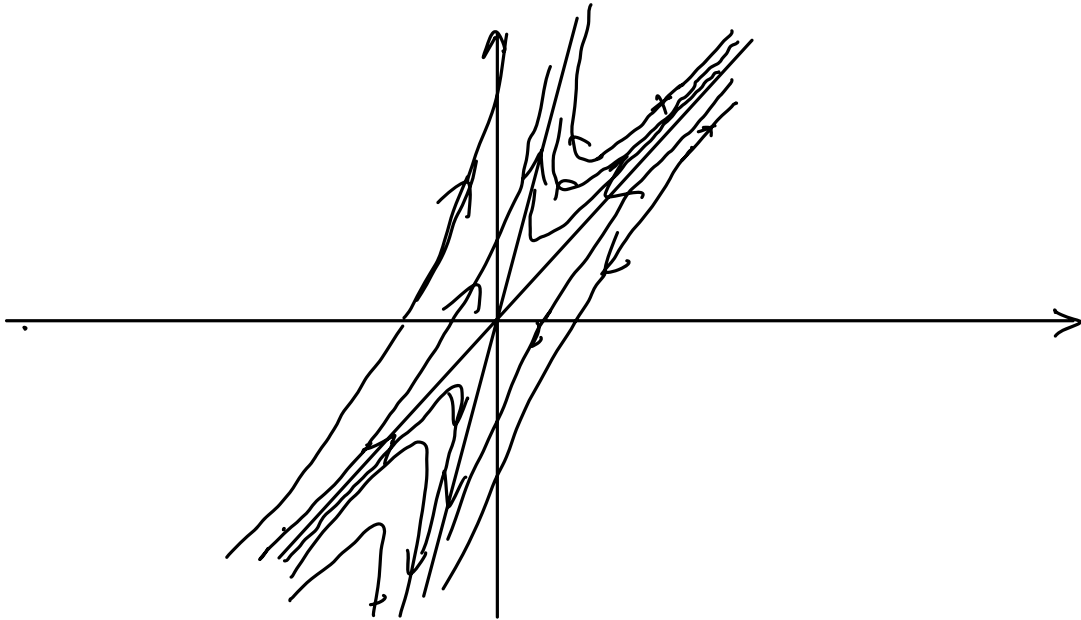
(x_1, x_2) est alors solution de S_1 ss: $X' = AX$

ss: $P^{-1}X' = DP^{-1}X$ ss: $Y' = DY$

$$\text{ssi } \begin{cases} y_1' = -y_1 \\ y_2' = 2y_2 \end{cases} \quad \text{ssi } \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} y_1 = t \mapsto \lambda e^{-t} \\ y_2 = t \mapsto \mu e^{2t} \end{cases}$$

$$\text{ssi } \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, X = P \begin{pmatrix} t \mapsto \lambda e^{-t} \\ t \mapsto \mu e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\text{ssi } \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, X = t \mapsto \lambda e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$



Exo1) 1, 2, 3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix}, \quad A \text{ est de rang 1 et une base de } E_0(A) = \text{Ker } A \text{ est } \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{Donc en posant } P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{on a } A = P D P^{-1}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-3 & 0 & -3 \\ 0 & x-3 & -2 \\ 2 & -2 & x \end{vmatrix}$$

$$= (x-3)^2 x + 6(x-3) - 4(x-3)$$

$$= (x-3) [(x-3)x + 2] = (x-3)(x-1)(x-2)$$