

Exo 5] $\mathbb{C} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-3 & 1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix} = (x-3)(x+1) + 4 = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

N.B.: $A - I_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ et $E_1(A) = \text{Ker}(A - I_2) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$
 $\dim E_1(A) \neq 2 = \dim(\mathbb{C}^2)$
 donc A n'est pas diagonalisable.

(de rang 1 donc $\dim \text{Ker}(A - I_2) = 2 - 1 = 1$.)
 On complète $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en une base de $\mathbb{R}^2$, par exemple avec $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

alors, en posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, alors $P^{-1}AP$ prend la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (\text{on peut prouver que } \lambda = 1 \text{ car}$$

A et $\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ sont semblables et ont donc la même trace) $\square$

P.40] $\mathbb{C}$ Supposons u trigonalisable, alors il existe une base B' de E tq $A' = \text{Mat}_{B'}(u)$ soit triangulaire supérieure.

Mais alors, de la formule de changement de base :

$$A' = \underbrace{P_{B' \rightarrow B}}_{= (P_{B \rightarrow B'})^{-1}} A P_{B \rightarrow B'} \quad \text{et } A \text{ est donc semblable à une matrice triangulaire supérieure.}$$

Si réciproquement A est trigonalisable alors il existe P inversible et A' triangulaire supérieure tq $A = PA'P^{-1}$.

En notant B' la famille de vecteurs dont P est la matrice selon B , alors comme P est inversible, B' est encore une base de E .

Puis $A' = P^{-1}AP = P_{B' \rightarrow B} A P_{B \rightarrow B'} = \text{Mat}_{B'}(u)$

et u est donc trigonalisable. $\square$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Thm 42 | On montre que si χ_u est scindé, alors u est trigonalisable : on procède par récurrence sur $n = \dim E$. C'est immédiat si $n = 1$ (où tout endomorphisme est trigonalisable).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose le résultat acquis à ce rang.

Supposons $\dim E = n+1$, $u \in \mathcal{L}_K(E)$ et χ_u scindé.

On note λ une racine de χ_u et $e \in E \setminus \{0\}$ tq $u(e) = \lambda e$.

On complète e , en $\mathcal{B}(e, e_1, \dots, e_n)$ une base de E :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A & \\ 0 & & & \end{array} \right) \quad \text{où } A \in M_n(K)$$

$$\chi_u(X) = (X - \lambda) \chi_A(X)$$

χ_u étant scindé, χ_A l'est à son tour et, d'après l'hypothèse de récurrence : A est trigonalisable.

Il existe donc $P \in GL_n(K)$, T triangulaire supérieure

tq $A = PTP^{-1}$

Mais alors

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & P^{-1} & \\ 0 & & & \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A & \\ 0 & & & \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & P^{-1} & \\ 0 & & & \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & P^{-1} & \\ 0 & & & \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & AP^{-1} & \\ 0 & & & \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & P^{-1}AP^{-1} & \\ 0 & & & \end{array} \right) \leftarrow \text{Triangulaire supérieure} \end{aligned}$$

Donc M est trigonalisable, ce qui achève le raisonnement. $\square$

Ex. 45 | I $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ $\chi_M(x) = x^2 - 6x + 9$
 $= (x-3)^2$

$M - 3I_2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ est de rang 1 et

$E_3(M) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (ou, si on préfère $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$)

Méthode 1 : On calcule $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Méthode 2 : On exprime Me_2 selon e_1, e_2 $Me_1 = 3e_1$

$Me_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 3e_2 + \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = 3e_2 - 2e_1$

donc M est semblable à $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ← Matrice de l'endomorphisme canonique associé à M

(et on a $M = P \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}$ selon (e_1, e_2) . $\square$)

$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & x \\ 0 & \lambda_2 & x \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

Exo 6 | I

$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x & -3 & -3 \\ 1 & x-8 & -6 \\ -2 & 14 & x+10 \end{vmatrix} \stackrel{C_2 \leftarrow C_2 - C_3}{=} \begin{vmatrix} x & 0 & -3 \\ 1 & x-2 & -6 \\ -2 & -x+4 & x+10 \end{vmatrix}$

$= x \left((x-2)(x+10) - 6(x-4) \right) - 3(-x+4 + 2x-4)$

$= x \left[x^2 + 2x + 4 \right] - 3x = x(x^2 + 2x + 1)$

$= \boxed{x(x+1)^2}$

$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix} \quad C_2 - C_3 = -2C_1$

* Détermination de $E_0(A)$:

on sait que $\dim E_0(A) = 1$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in E_0(A)$

$$\text{donc } E_0(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

* Détermination de $E_{-1}(A)$:

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & 9 & 6 \\ 2 & -14 & -9 \end{pmatrix} \quad 3C_2 - 4C_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = -3C_1$$

$$\text{donc } \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \in E_{-1}(A)$$

$$\text{Ainsi: } E_{-1}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \right)$$

On complète $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \right)$ en $\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{e_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}}_{e_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{e_3} \right)$ une base de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} A e_3 &= \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -10 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix} \\ &= - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{donc, en posant } P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ on a } A = P T P^{-1}$$

□

Exercice 7 [On se cherche à modifier que e_3

qu'on remplace par $e'_3 = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$.

On souhaite avoir

$$u(e'_3) = \lambda_2 e'_3 + e_2$$

ce qui matriciellement s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & a \\ 0 & \lambda_2 & b \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et revient à

$$\begin{cases} \lambda_1 \alpha + a \gamma = \lambda_2 \alpha \\ \cancel{\lambda_2 \beta} + b \gamma = \cancel{\lambda_2 \beta} + 1 \\ \lambda_2 \gamma = \lambda_2 \gamma \end{cases}$$

ou encore à $\gamma = \frac{1}{b}$ et $\alpha = \frac{\frac{a}{b}}{\lambda_2 - \lambda_1}$

et aucune condition ne porte sur β .

Ainsi $e'_3 = \frac{a}{(\lambda_2 - \lambda_1)b} e_1 + \frac{1}{b} e_3$ convient. $\square$

Hypothèse : $A \in M_3(\mathbb{K})$ et λ est valeur propre triple de A et $\dim E_\lambda(A) = 1$.

On montre que $(A - \lambda I_3)^3 = 0$ et $(A - \lambda I_3)^2 \neq 0$

En effet $\chi_A(X) = (X - \lambda)^3$ et, d'après le thm de Cayley-Hamilton, $\chi_A(A) = (A - \lambda I_3)^3 = 0$.

On ne saurait avoir $(A - \lambda I_3)^2 = 0$ car ceci

indiquerait que $\underbrace{\text{Im}(A - \lambda I_3)}_{\text{de dimension 2}} \subset \underbrace{\text{Ker}(A - \lambda I_3)}_{\text{de dimension 1}}$
ce qui est impossible.

Donc $(A - \lambda I_3)^2 \neq 0$.

On choisit alors $e_3 \in (A - \lambda I_3)^2 e_3 \neq 0$
(on pourra prendre $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour e_3)

on pose alors $e_2 = (A - \lambda I_3) e_3$

$$e_1 = (A - \lambda I_3) e_2 = (A - \lambda I_3)^2 e_3$$

On vérifie que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{K}^3$:

soit $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{K}^3$ t.q. $\alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + \alpha_3 \cdot e_3 = 0$

alors, en multipliant par $A - \lambda I_3$: $\alpha_2 \cdot e_1 + \alpha_3 \cdot e_2 = 0$

et, encore une fois : $\alpha_3 \cdot e_1 = 0$

or $e_1 \neq 0$ donc $\alpha_3 = 0$ puis $\alpha_2 = \alpha_1 = 0$

Donc (e_1, e_2, e_3) est libre, et c'est alors une base de $\mathbb{K}^3$.

On a de plus :

$$Ae_3 = \lambda e_3 + e_2$$

$$Ae_2 = \lambda e_2 + e_1$$

et $Ae_1 = \lambda e_1$

Donc en notant P la matrice de (e_1, e_2, e_3) selon la base canonique (i.e. la matrice de passage de la base canonique $\hat{=}(e_1, e_2, e_3)$) :

alors $A = P \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} P^{-1}$

Exo 8 $\mathbb{I}$ $A - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (A - I)^3 = 0.$$

On pose alors $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_2 = (A - I)e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$e_1 = (A - I)e_2 = (A - I)^2 e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \left(\underbrace{(A - I)e_1 = 0}_{= (A - I)^3 e_3} \right)$

Alors (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{K}^3$ et,

$$\text{Mat}_{(e_1, e_2, e_3)}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbb{I}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

On reprend l'exemple 45 : $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

$$M - 3I_2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \neq 0$$

$$(M - 3I_2)^2 = 0$$

On pose $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_1 = (M - 3I_2)e_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

alors $(M - 3I_2)e_1 = (M - 3I_2)^2 e_2 = 0$

donc $Me_1 = 3e_1$ et $Me_2 = 3e_2 + e_1$

Donc en posant

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \text{ alors}$$

$$M = P \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Trigonaliser (exo 12) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$

$$\text{I} \quad \chi_A(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2.$$

Méthode 1 : $A - 2I_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, de rang 1

$$\text{et } E_2(A) = \ker(A - 2I_2) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

On pose $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2e_2 - e_1$$

Donc $A = PTP^{-1}$ en posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\text{et } T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Méthode 2 : $A - 2I_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $(A - 2I_2)^2 = 0$

on pose $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_1 = (A - 2I_2)e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ($(A - 2I_2)e_1 = 0$)

alors $Ae_2 = 2e_2 + e_1$ et $Ae_1 = 2e_1$

donc en posant $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

alors $A = PTP^{-1}$.

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \quad \chi_B(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

$$B - I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \text{ de rang 1}$$

Méthode 1 : on pose $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$B e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = e_1 + e_2$$

Donc en posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

on a $B = \underline{P T P^{-1}}$.

Méthode 2 $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (par exemple)
 $e_1 = (B - I_2) e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = P T P^{-1}$$