Programme de colles mathématiques PC

Semaine 8 du 13/11 au 17/11

1 Intégration

Notions de subdivision, définition des fonctions en escalier et continues par morceaux.

Intégrale des fonctions en escalier sur un segment. Rappel des résultats de première année et extension aux fonctions continues par morceaux. Positivité, changement de variable, intégration par parties.

Définition de la convergence de l'intégrale de f continue par morceaux sur $[a,b[$, sur $]a,b]$, sur $]a,b[$.

Positivité, changement de variable, intégration par partie pour une intégrale généralisée.

Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables

- Exercice-type : On suppose $f:[a,b]\to\mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^1$ où $a<b$ sont deux réels. Justifier l'existence d'un réel $M\geqslant 0$ tel que
$$\forall n\in\mathbb{N},\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{b-a}{n}\,f\left(a+k\,\frac{b-a}{n}\right)\right|\leqslant\frac{(b-a)^2}{2\,n}\,M$$

- Exercice-type : On suppose I et J des intervalles, $f:I\to\mathbb{K}$ continue, $u:J\to I$ et $v:J\to I$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, alors montrer que $x\in J\mapsto\int_{u(x)}^{v(x)}f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et en préciser la dérivée.

- Etude de la convergence et de la valeur éventuelle de $\int_0^{+\infty}e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ selon la valeur de $\alpha\in\mathbb{R}$.

- Etude de la convergence et de la valeur éventuelle de $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ et de $\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ (oui, on détaille), et enfin de $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$.

- Enoncé de la proposition 40 (détail des fonctions de référence quant à leur intégrabilité)

2 Espaces vectoriel normés (le tout début !)

Définition d'une norme, d'une distance, d'une boule ouverte et fermée.

- Enoncé de la définition d'une norme sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).