Exo 7 | I f_n est continue sur $]0,+\infty[$

$$f_n(x) = \frac{n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{x(1+x^2)} \underset{x\to 0}{=} \frac{n\left(\frac{x}{n}+o(x)\right)}{x(1+x^2)} = \frac{1+o(1)}{1+x^2}$$

$$\xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

Ainsi f_n est intégrable en 0.

$$x^2 f_n(x) = \frac{n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{x+\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \text{ par croissances comparées.}$$

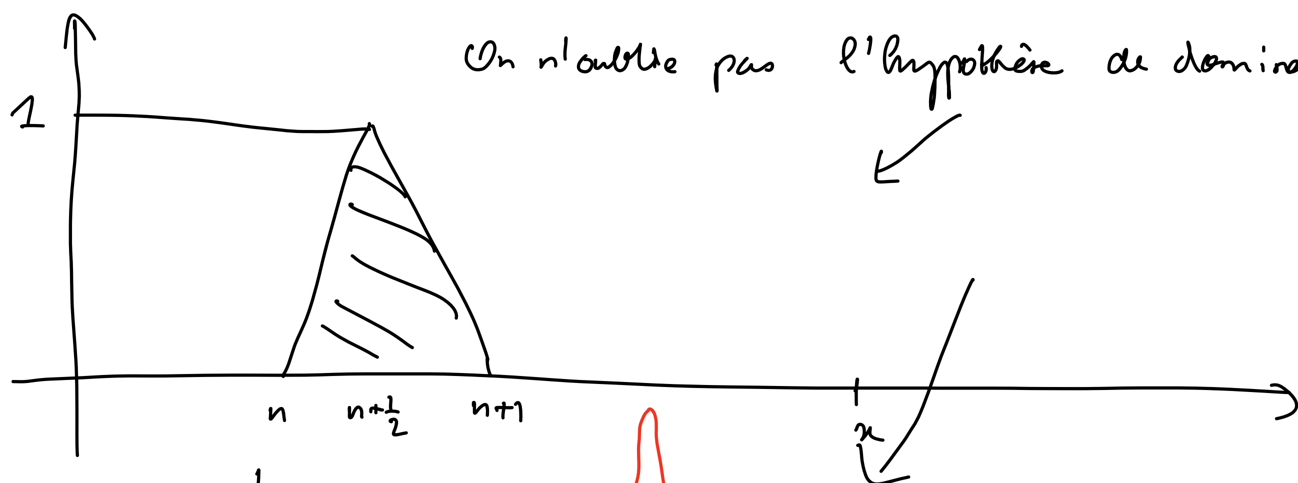
Ainsi f_n est intégrable sur $]0,+\infty[$ ce qui justifie la définition de u_n.

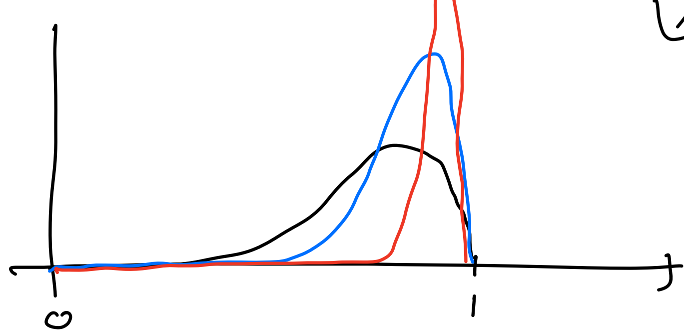
Soit $x>0$, $\quad f_n(x) = \dfrac{n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{x(1+x^2)} \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{n\left(\frac{x}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{x(1+x^2)}$

$$= \frac{x+o(1)}{x(1+x^2)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{1+x^2}.$$

Donc (f_n) converge simplement vers $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.

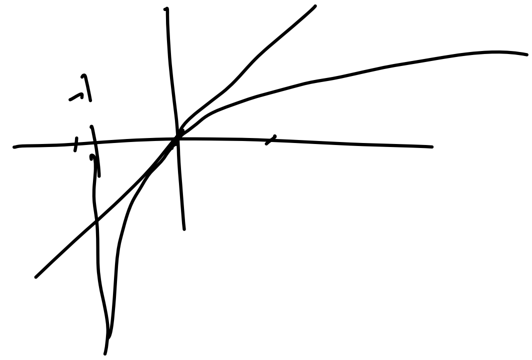
On n'oublie pas l'hypothèse de domination !





$$\forall x>0,\ f_n(x) = \frac{n \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{x(1+x^2)} \leqslant \frac{n \times \frac{x}{n}}{x(1+x^2)} \leqslant \frac{1}{1+x^2}.$$

Inégalité classique
$\forall x>-1,\ \ln(1+x) \leqslant x$



Ainsi, en posant $\varphi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$

on a φ continue et intégrable sur $]0,+\infty[$

Mais alors, par le thm de convergence dominée,

$$\underline{\int_0^{+\infty} f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} \varphi} = \left[\arctan x\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}. \quad]\!]$$

<u>Exercice 8</u> [[Soit $t>0$,

$$\frac{t}{e^t-1} = te^{-t}\left[\frac{1}{1-e^{-t}}\right]$$

(Rappel : Si $|a|<1$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$.)

$$= te^{-t}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(e^{-t})^n\right) \text{ car } |e^{-t}|<1$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} t\, e^{-(n+1)t} = \sum_{n=1}^{+\infty} t\, e^{-nt}$$

On pose $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall t\in]0,+\infty[,\ f_n(t) = te^{-nt}$.

On a bien sûr, étant donné $n\in\mathbb{N}^*$, f_n continue sur $]0,+\infty[$, bien évident f_n est intégrable en 0 et

$$t^2 f_n(t) = t^3 e^{-nt} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \text{ par croissances comparées}$$

donc $f_n(t) = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et ainsi f_n est intégrable en $+\infty$. Ainsi f_n est intégrable sur $]0,+\infty[$.

$$\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,dt = \int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = \int_0^{+\infty} te^{-nt}\,dt$$

$t\mapsto t$ et $t \mapsto -\frac{1}{n}e^{-nt}$ sont de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et $t\times\left(-\frac{1}{n}\right)e^{-nt}$ a pour limite 0 en 0 et en $+\infty$. Donc par une intégration par parties :

$$\int_0^{+\infty} t e^{-nt}\,dt = \left[-\frac{t}{n}e^{-nt}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\frac{1}{n}e^{-nt}\,dt$$
$$= \frac{1}{n}\left[-\frac{1}{n}e^{-nt}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{n^2}.$$

<u>On a donc :</u>

- $\sum_{n\geq 1} f_n$ qui converge simplt sur $]0,+\infty[$ vers $t \mapsto \frac{t}{e^t-1}$
- $\forall n$, f_n est continue sur $]0,+\infty[$ tout comme $t \mapsto \frac{t}{e^t-1}$.
- $\forall n$, f_n est intégrable et De plus $\sum_{n\geq 1}\int_0^{+\infty}|f_n| = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ converge

DONC, d'après le thm d'intégration terme à terme :

$t \mapsto \frac{t}{e^t-1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$

et $$\int_0^{+\infty}\frac{t}{e^t-1}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}.$$]

Exo 9 | $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\,dt$

[$t \mapsto \frac{\ln t}{1-t^2}$ est continue sur $]0,1[$

et, pour tout $t \in]0,1[$, $\frac{\ln t}{1-t^2} = \ln t \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n}\right)$

On pose alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in]0,1[$,
$$f_n(t) = t^{2n}\ln t.$$

f_n est continue sur $]0,1[$, et manifestement intégrable sur cet intervalle (l'intégrale n'est généralisée que pour $n=0$, or $\ln$ est intégrable sur $]0,1]$).

$\sum f_n$ converge simplt vers $t \mapsto \frac{\ln t}{1-t^2}$.

Puis, étant donné $n \in \mathbb{N}$,
$$\int_0^1 |f_n(t)|\,dt = \int_0^1 -f_n(t)\,dt = \int_0^1 -t^{2n}\ln t\,dt$$

$t \mapsto \ln t$ et $t \mapsto -\frac{t^{2n+1}}{2n+1}$ sont de classe C^1 sur $]0,1[$

et $-\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\ln t$ a pour limite 0 en 0 comme en 1

donc, par une intégration par parties :

$$\int_0^1 |f_n(t)|\,dt = \underbrace{\left[-\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\ln t\right]_0^1}_{=0} + \int_0^1 \frac{t^{2n}}{2n+1}\,dt$$

$$= \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Or $\sum \frac{1}{(2n+1)^2}$ converge et donc, d'après le thm d'intégration terme à terme,

$t \mapsto \frac{\ln t}{1-t^2}$ est intégrable sur $]0,1[$ et

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(t)\,dt$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{1}{(2n+1)^2}.$$

<u>Remarque</u> : Sachant que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2}$$

$$= \left(1-\frac{1}{4}\right)\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Ainsi $\boxed{\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\,dt = -\frac{\pi^2}{8}}$]

Comment montrer que $\int_I \sum f_n = \sum \int_I f_n$?

* Par le théorème d'interversion somme-intégrale pourvu que :
  - $\sum f_n$ est une série de fonctions continues qui <u>converge uniformément</u> sur le <u>segment</u> $I = [a,b]$.

* Par le théorème d'intégration terme à terme pourvu que
  - $\sum f_n$ converge simplement sur I vers une fn f continue par morceaux.
  - $\forall n$, f_n est continue par morceaux et intégrable

- $\sum \int_I |f_n|$ est convergente.

(de plus, dans ces conditions f est intégrable sur I et ...)

* Par le thm de convergence dominée si, en notant $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$, on trouve $\varphi : I \to \mathbb{R}$ intégrable tq

$$\forall n, \ |S_n| \leq \varphi$$

$\sum f_n$ CVS vers f

↳ et ainsi, par le thm de convergence dominée,

$\int_I S_n \longrightarrow \int_I f$ ce qui montre encore que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \int_I f_k = \int_I \sum_{k=0}^{+\infty} f_k.$$

<u>Exercice</u> : Soit $f : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x^2+n^2}$

1). Mq f est définie et continue sur $\mathbb{R}$

2) Mq f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et calculer $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$,

[1) On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{(-1)^n}{x^2+n^2}.$$

$\|f_n\|_\infty^{\mathbb{R}} = \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge donc $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

De plus, $\forall n$, f_n est continue donc f est ainsi bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2) On calcule $\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+n^2}$

$$= \left[\frac{1}{n} \arctan\left(\frac{x}{n}\right)\right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{\pi}{2n}$$

(tandis que $\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = (-1)^n \frac{\pi}{2n}$)

On note que $\sum \frac{\pi}{2n}$ diverge et on ne peut ici appliquer le thm d'intégration terme à terme.