Th. 14 | I On procède par récurrence sur $k \geqslant 1$, le cas $k=1$ ayant été démontré au Thm 12.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on suppose le résultat acquis à ce rang, et soit (f_n) une suite de fns de classe C^{k+1} dont on suppose que :

- (f_n) converge simplement sur I vers f
- pour tout $\ell \in [\![1, k]\!]$, $(f_n^{(\ell)})$ converge simplement sur I, de limite $h_\ell : I \to \mathbb{K}$
- $(f_n^{(k+1)})$ converge uniformément sur tout segment $[a,b] \subset I$ vers $h_{k+1} : I \to \mathbb{K}$.

Mais alors $(f_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions de classe C^1 qui converge simplement vers $h_k : I \to \mathbb{K}$ et dont la suite des dérivées $(f_n^{(k+1)})$ converge uniformément* vers $h_{k+1} : I \to \mathbb{K}$ *(sur tout segment $[a,b] \subset I$)

Du théorème 12, on déduit que h_k est de classe C^1,
$h'_k = h_{k+1}$.

De plus $(f_n^{(k)})$ converge uniformément sur tout segment $[a,b] \subset I$ vers h_k.

Enfin, on a donc désormais

- (f_n) une suite de fns de classe C^k qui converge simplement vers f
- $\forall \ell \in [\![1, k-1]\!]$, $(f_n^{(\ell)})$ converge simplement vers h_ℓ
- (f_n^{k}) converge uniformément sur tout segment $[a,b] \subset I$ vers h_k

Donc, de l'hypothèse de récurrence, on déduit que f est de classe C^k et que $\forall \ell \in [\![1, k]\!]$, $f^{(\ell)} = h_\ell$.

De plus, $f^{(k)} = h_k$ est, on l'a vu, de classe C^1 et de dérivée h_{k+1}, donc f est de classe C^{k+1} et
$$f^{(k+1)} = h_{k+1}.$$
Ceci achève la récurrence.]

Exercice : Soit $S : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$
$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}.$$

Montrer que S est de classe C^∞ et exprimer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $x>0$, $S^{(k)}(x)$.

[On note bien sûr $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$
$$x \mapsto \frac{(-1)^n}{x+n}$$

Bien sûr, des théorèmes généraux on déduit que $\forall n$, f_n est de classe C^∞.

Soit $k \geq 1$ fixé (on va montrer que S est de classe C^k), on remarque que pour tout $x>0$, $\left(\frac{1}{x+n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, de termes positifs et de limite nulle donc d'après le critère spécial des séries alternées, $\sum \frac{(-1)^n}{x+n}$ est convergente.

Ceci montre donc que $\underline{\sum f_n}$ converge simplement vers S sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Ensuite, étant donné $\ell \in \mathbb{N}^*$ et $x>0$,
$$f_n^{(\ell)}(x) = \frac{\ell!\,(-1)^{n+\ell}}{(x+n)^{\ell+1}}$$ (s'établit par récurrence élémentaire sur $\ell \in \mathbb{N}^*$)

On remarque que $$\frac{\ell!\,(-1)^{n+\ell}}{(x+n)^{\ell+1}} \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
donc, par comparaison à une série de Riemann,
$$\sum \frac{\ell!\,(-1)^{n+\ell}}{(x+n)^{\ell+1}}$$ converge absolument.

Ainsi $\sum f_n^{(\ell)}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Soit maintenant $a<b$ deux réels strictement positifs.

alors $\|f_n^{(k)}\|_\infty^{[a,b]} = \dfrac{k!}{(a+n)^{k+1}} \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

donc $\sum f_n^{(k)}$ converge normalement sur $[a,b]$.

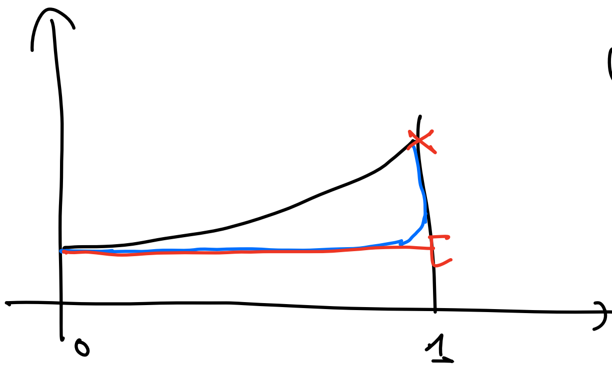
Mais alors, d'après le théorème 14, S est de classe C^k

et $\forall x>0,\ S^{(k)}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}(x)$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{k!\,(-1)^{n+k}}{(x+n)^{k+1}}.$$

Ayant montré que S est de classe C^k pour $k\geq 1$ arbitraire, on a donc bien établi que S est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$.]

<u>Exercice 6</u>



On pose $\forall n\in\mathbb{N}$,

$$f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x^n)$$

$\forall x\in[0,1[$,

$$f(x^n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(0)$$

car $x^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et f est continue en 0.

et, bien sûr, $f(1^n) = f(1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(1)$

Donc (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers

$$g : \begin{cases} x\in[0,1[\longmapsto f(0) \\ 1 \longmapsto f(1) \end{cases}$$

f continue sur le segment $[0,1]$ donc elle est bornée et atteint ses bornes et ainsi il existe $M\geq 0$ tq $\forall x\in[0,1]$, $|f(x)|\leq M$.

On pose alors $\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longmapsto M$$

Bien sûr φ est intégrable sur $[0,1]$ et on a

$\forall n,\ |f_n|\leq \varphi$

Donc, d'après le thm de convergence dominée

$$\int_0^1 f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 g \quad \text{c-à-d} \quad \int_0^1 f(t^n)\,dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 g = (1-0)f(0) = f(0)$$

$\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\,dt \qquad x = t^n, \qquad \underbrace{dx = n t^{n-1}\,dt}$

$= \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\sqrt[n]{x}\,dx}{(1+x)} \qquad \frac{1}{n} t\,dx = t^n\,dt$

(On peut conclure avec le thm de CVD) $\frac{1}{n}\sqrt[n]{x}\,dx = t^n\,dt$

<u>Autre méthode</u> : $t \mapsto \frac{1}{n}\ln(1+t^n)$ et $t \mapsto t$ sont de classe C^1 sur $[0,1]$, donc, par une intégration par parties :

$$\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\,dt = \left[\frac{1}{n}\ln(1+t^n)\times t\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{n}\times\ln(1+t^n)\times 1\,dt$$

$$= \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n}\underbrace{\int_0^1 \ln(1+t^n)\,dt}$$

$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(1+0)$ d'après la première question car $x \mapsto \ln(1+x)$ est continue sur $[0,1]$

Ainsi $\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\,dt = \frac{\ln 2}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$

ce qui montre que $\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\,dt \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln 2}{n}$.]]

<u>Exo 7</u>|