Exo 14 On a vu que $\sum f_n$ CVS vers f sur $\mathbb{R}^{+*}$
(en notant $f_n : x \mapsto e^{-x\sqrt{n}}$)

$\|f_n\|_\infty^{]0,+\infty[} = 1$. $\sum f_n$ ne converge donc pas normalt vers f sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Soit $a > 0$, $\|f_n\|_\infty^{[a,+\infty[} = e^{-a\sqrt{n}}$.

or $\sum e^{-a\sqrt{n}}$ converge donc $\sum f_n$ converge normalt vers f sur $[a, +\infty[$.

Comme de plus pour tout n, f_n est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, alors f est à son tour continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

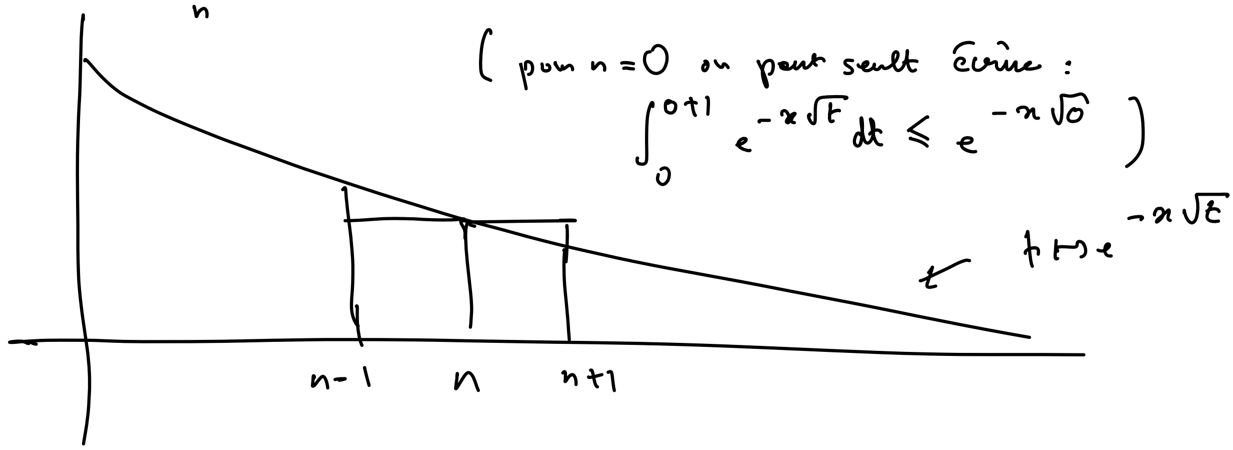
Puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n a pour limite 0 (sauf si $n=0$ où f_n a pour lite 1)

On déduit du thm de la double limite que f a pour limite 1 $(= 1 + 0 + 0 + \dots)$ en $+\infty$.

Soit $x > 0$, et $n > 0$, $t \mapsto e^{-x\sqrt{t}}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ donc

$$\int_n^{n+1} e^{-x\sqrt{t}}\,dt \leqslant e^{-x\sqrt{n}} \leqslant \int_{n-1}^{n} e^{-x\sqrt{t}}\,dt$$

(pour $n=0$ on peut seult écrire : $\int_0^{0+1} e^{-x\sqrt{t}}\,dt \leqslant e^{-x\sqrt{0}}$)



et ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}\,dt \leqslant f(x) \leqslant 1 + \int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}\,dt$

Sans surprise, $x \mapsto e^{-x\sqrt{t}}$ est intégrable en $+\infty$ car

$$e^{-x\sqrt{t}} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

On pose $u = \sqrt{t}$, alors $t \mapsto \sqrt{t}$ réalise une bijection

C^1 de $]0,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$, strictement croissante donc par un chgt de variable : $\left(du = \frac{1}{2u} dt \right.$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-xu} \times 2u\, du$$

Puis $u \mapsto 2u$ et $u \mapsto -\frac{1}{x} e^{-xu}$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$

et $-\frac{2u}{x} e^{-xu} \xrightarrow[u \to +\infty]{} 0$ donc, par une intégration par parties :

$$\int_0^{+\infty} 2u\, e^{-xu}\, du = \left[-\frac{2u}{x} e^{-xu} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2e^{-xu}}{x}\, du = \frac{2}{x^2}.$$

Ainsi $\boxed{\forall x > 0,\ \frac{2}{x^2} \leq f(x) \leq 1 + \frac{2}{x^2}}$

On en déduit que $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{2}{x^2}$. $\left(\text{car } f(x) = \frac{2}{x^2} + \underset{x \to +\infty}{O}(1) \right)$

__Exo 9__

$$\sum_{n \geq 1} f_n \quad \text{où} \quad f_n(x) = \frac{1}{n^2 + x^2}$$

$\forall n \geq 1$, f_n est bornée et $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n^2}$ or $\sum \frac{1}{n^2}$ converge donc $\sum f_n$ converge normalement.

(et bien sûr aussi uniformément et simplement.).

__Exo 10__ $\sum_{n \geq 1} f_n$ où $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n + x^2}$

$\forall n \geq 1$, f_n est bornée et $\|f\|_\infty = \frac{1}{n}$. $\sum \frac{1}{n}$ diverge donc $\sum f_n$ ne converge pas normalement.

__Etude de la convergence simple :__

Soit $x \in \mathbb{R}$, $\left(\frac{1}{n+x^2} \right)$ est une suite décroissante et de limite nulle de réels donc d'après le critère spécial des séries alternées, $\sum \frac{(-1)^n}{n+x^2}$ converge. (ce qui montre que $\sum f_n$ converge simplement vers une fn qu'on nommera f.)

De plus, $\left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right| = |R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1+x^2}$

$\leq \frac{1}{n+1}$

Comme $\frac{1}{n+1} \to 0$ ceci montre que $\sum f_n$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

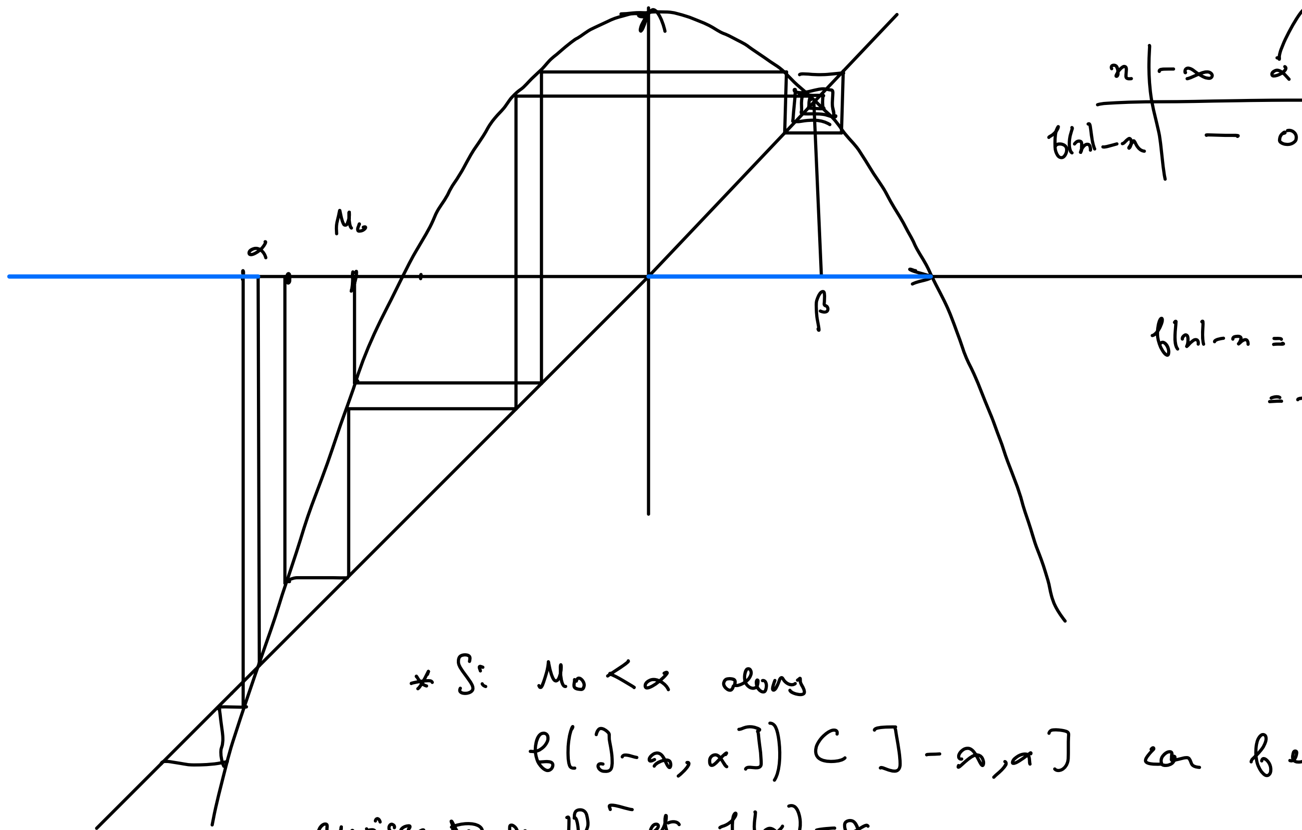
Etude de (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 - u_n^2. \end{cases}$

Etude des variations de $f : x \mapsto 1 - x^2$ sur $\mathbb{R}$

signe de $x \mapsto f(x) - x$

Tracé (graphe de f + première bissectrice) $\quad \alpha = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad \beta = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

x	$-\infty$		α		0	β		$+\infty$
$f(x)-x$		$-$	0	$+$		0	$-$	



$$f(x) - x = 1 - x - x^2 = -\left(x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

* Si $u_0 < \alpha$ alors

$f(]-\infty, \alpha]) \subset]-\infty, \alpha]$ car f est croissante sur $\mathbb{R}^-$ et $f(\alpha) = \alpha$.

On en déduit que $\forall n,\ u_n \in]-\infty, \alpha]$

Du signe de $x \mapsto f(x) - x$, on déduit que (u_n) est décroissante. On suppose par l'absurde (u_n) convergente, de limite ℓ, alors on aurait $\ell \leqslant u_0 < \alpha$ et, de plus, f étant continue en ℓ, on aurait $f(\ell) = \ell$ ce qui est impossible.

Ainsi, par l'absurde, (u_n) diverge vers $-\infty$.

* Si $u_0 = \alpha$ alors $\forall n,\ u_n = \alpha$.

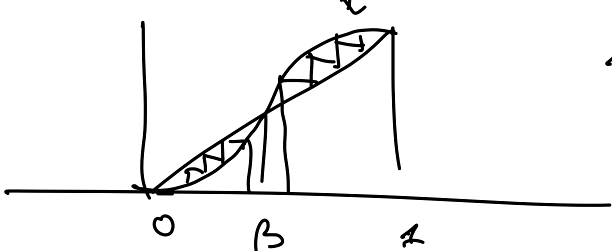
* On remarque que $f([0,1]) \subset [0,1]$, et f étant décroissante sur $[0,1]$ alors $f \circ f$ est croissante sur $[0,1]$.

On calcule alors $f \circ f(x) - x$: (pour tout $x \in [0,1]$)

$\forall x$, $f(f(x)) - x = 1 - (1-x^2)^2 - x = -x^4 + 2x^2 - x$

$$= \underbrace{x(1-x)}_{\geq 0}\underbrace{(x^2+x-1)}_{x - f(x)}$$

x	0		β		1
$f\circ f(x) - x$	0	$-$	0	$+$	0



* Si $u_0 \in [0, \beta[$,

On remarque que $f\circ f([0,\beta]) \subset [0,\beta]$

(car $f\circ f$ est croissante sur $[0,1]$ et $f\circ f(0) = 0$, $f\circ f(\beta) = \beta$)

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} \in [0,\beta]$.

Du signe de $x \mapsto f\circ f(x) - x$ on déduit que (u_{2n}) est décroissante.

Minorée par 0, (u_{2n}) converge de limite ℓ telle que $0 \leq \ell \leq u_0 < \beta$. De plus, $f\circ f$ est continue en ℓ donc $f\circ f(\ell) = \ell$. et ainsi $\ell = 0$

Puis, $\forall n$, $u_{2n+1} = f(u_{2n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(0) = 1$

Ainsi (u_n) diverge.

* Si $u_0 = \beta$ alors $\forall n$, $u_n = \beta$.

* Si $\beta < u_0 \leq 1$

Première méthode : on montre de même que (u_{2n}) est croissante, et converge vers 1, puis que (u_{2n+1}) converge vers 0 et qu'ainsi (u_n) diverge.

Deuxième méthode : f étant strictement décroissante sur $[0,1]$ et sachant $\beta < u_0 \leq 1$ alors $\beta > u_1 \geq 0$ et on a vu qu'alors (u_n) diverge.

* Si $\alpha < u_0 < 0$, on va montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tq $u_N \in [0,1]$,

Pour ce faire on raisonne par l'absurde en supposant que $\forall n$, $u_n \notin [0,1]$.

On montre alors par récurrence que $\forall n$, $u_n \in [\alpha, 0]$

(Hérédité : si $u_n \in [\alpha,0]$, $u_{n+1} \in f([\alpha,0])$
$\in [\alpha,1]$ or $u_{n+1} \notin [0,1]$

donc $u_{n+1} \in [\alpha, 0[$ ...)

Mais alors du signe de $x \mapsto f(x)-x$, on déduit que (u_n) est croissante. Majorée par 0, (u_n) converge de limite ℓ tq $\alpha < u_0 \leq \ell \leqslant 0$.

De plus f étant continue en ℓ alors $f(\ell)=\ell$ ce qui est impossible.

Donc, par l'absurde il existe $N \in \mathbb{N}$ tq $u_N \in [0,1]$.

16) $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$.

1) Mq S est C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$.

On pose $\forall n$, $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}$

Soit $x>0$, $\left(\frac{1}{x+n}\right)$ est une suite décroissante de réels qui converge vers 0 et donc en vertu du critère spécial des séries alternées, $\sum f_n(x)$ converge.

De plus, $\forall n$ f_n est de classe C^1

et $\forall x>0$, $f'_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(x+n)^2}$

Soit $a>0$, $\|f'_n\|_\infty^{[a,+\infty[} = \frac{1}{(a+n)^2}$

or $\sum \frac{1}{(a+n)^2}$ converge

donc $\sum f'_n$ converge normalement sur $[a,+\infty[$, (et ce pour tout $a>0$)

Mais alors, S est bien de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$

et S' est la somme de $\sum f'_n$.