

Exercice : $\mathbb{R}^3$ étant muni du produit scalaire canonique

$$F = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0 \}$$

Déterminer $F^\perp$.

⌈ en notant $n = (1, 1, -1)$, $(x, y, z) \in F$ ssi $\langle (x, y, z), n \rangle = 0$

et ainsi $F \perp \text{Vect}(n)$ (plus précisément :

$$F = \{n\}^\perp = \text{Vect}(n)^\perp$$

On devine alors que $F^\perp = \text{Vect}(n)$

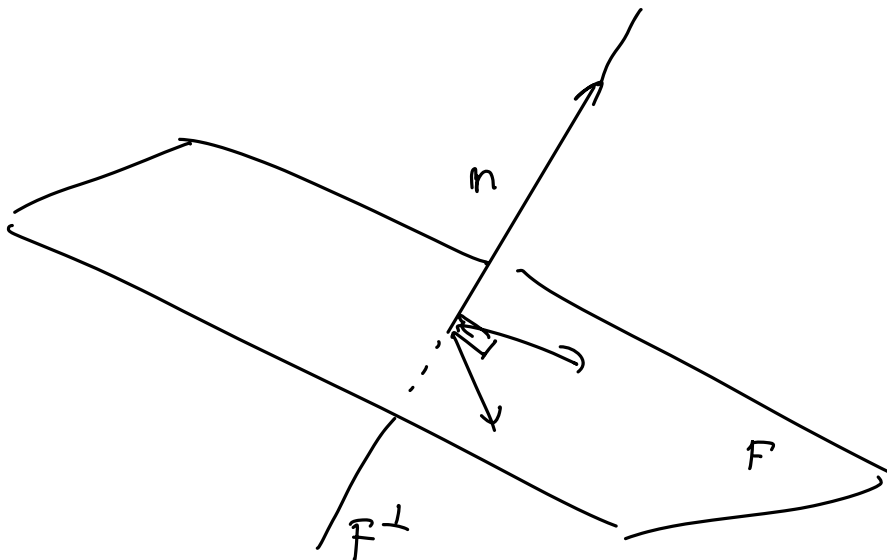
en effet, on a bien sûr déjà $n \perp F$ et ainsi $\text{Vect}(n) \subset F^\perp$

de plus F et $F^\perp$ sont en somme directe et de ce fait

$$\dim F + \dim F^\perp \leq 3 \quad \text{or} \quad \dim F = 2 \quad \text{et ainsi}$$

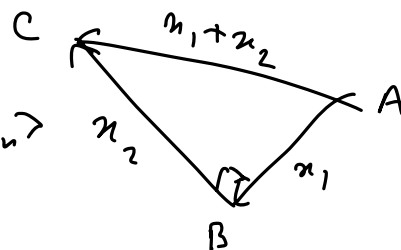
$$\dim F^\perp \leq 1$$

De ce fait $F^\perp = \text{Vect}(n)$. ⌋



Théorème ⌈

$$\begin{aligned} \|x_1 + \dots + x_n\|^2 &= \langle x_1 + \dots + x_n, x_1 + \dots + x_n \rangle \\ &= \sum_{(i,j)} \underbrace{\langle x_i, x_j \rangle}_{=0 \text{ si } i \neq j} \end{aligned}$$



$$= \sum_{i=1}^n \langle x_i, x_i \rangle = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2. \quad \square$$

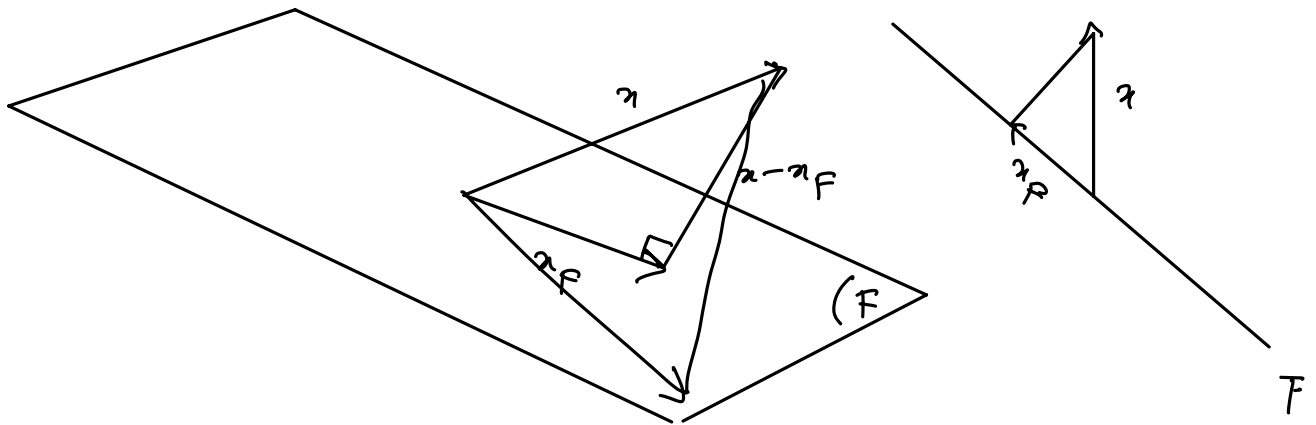
Corollaire 13 $\square$ On suppose $\forall i, x_i \neq 0$ et $(x_1, \dots, x_n)$ orthogonale et soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tq $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0$

Mais alors, d'après l'identité de Pythagore : $(\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n)$ est orthogonale :

$$\underbrace{\|\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n\|^2}_0 = \underbrace{\|\lambda_1 x_1\|^2}_{\geq 0 \text{ et } \|x_1\| \neq 0} + \dots + \underbrace{\|\lambda_n x_n\|^2}_{\geq 0}$$

Ainsi $\forall i, \|\lambda_i x_i\| = 0$ et ainsi $|\lambda_i| = 0$.

Donc $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0)$ et $(x_1, \dots, x_n)$ est libre. $\square$



Thm 14 $\square$ Soit $y \in F$, il existe alors $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ tq

$$y = y_1 \cdot e_1 + \dots + y_n \cdot e_n.$$

$$\begin{aligned} x - y \perp F (= \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)) \text{ssi } x - y \perp e_1, x - y \perp e_2, \dots, x - y \perp e_n. \\ \text{or } \langle x - y, e_i \rangle &= \langle x, e_i \rangle - \langle y, e_i \rangle \\ &= \langle x, e_i \rangle - \langle y_1 e_1 + \dots + y_n e_n, e_i \rangle \\ &= \langle x, e_i \rangle - y_i \quad ((e_1, \dots, e_n) \text{ est orthornormée}) \end{aligned}$$

Ainsi $x - y \perp F$ ssi $\forall i \in \{1, n\}, y_i = \langle x, e_i \rangle$.

Il existe donc bien x_F un unique élt de F tq $x - x_F \perp F$ et celui-ci est $x_F = \langle x, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle x, e_n \rangle e_n$.

Ce faisant on a montré que $E = F \oplus F^\perp$ (on a montré que $\forall x \in E$, il existe $(x_F, x_{F^\perp}) \in F \times F^\perp$ unique tq $x = x_F + x_{F^\perp}$). $\square$

Corollaire 15 $\square$ D'après l'identité de Pythagore, comme

$$x = \underbrace{x_F}_{\in F} + \underbrace{x - x_F}_{\in F^\perp} \quad \text{d'où } \|x\|^2 = \|x_F\|^2 + \|x - x_F\|^2 \quad \text{et d'où } \|x_F\| \leq \|x\|.$$

$$\geq \|x_F\|^2$$

Puis, étant donné $y \in F$, $x - y = \underbrace{x - x_F}_{\in F^\perp} + \underbrace{x_F - y}_{\in F}$

d'où on déduit de l'identité de Pythagore que

$$\|x - y\| \geq \|x - x_F\| \quad (\text{et, de plus, il y a égalité ssi } x_F - y = 0 \text{ ssi } y = x_F. \quad \square)$$

Remarque 1b en posant pour tout i , $e_i = \frac{b_i}{\|b_i\|}$, $(e_1, \dots, e_n)$ est alors une base orthonormale de F .

Ainsi le projeté orthogonal de x sur F est

$$\begin{aligned} x_F &= \langle x, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle x, e_n \rangle e_n \\ &= \langle x, \frac{b_1}{\|b_1\|} \rangle \frac{b_1}{\|b_1\|} + \dots + \langle x, \frac{b_n}{\|b_n\|} \rangle \frac{b_n}{\|b_n\|} \\ &= \frac{\langle x, b_1 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} b_1 + \dots + \frac{\langle x, b_n \rangle}{\langle b_n, b_n \rangle} b_n. \end{aligned}$$

Exercice 2

On pose $E = C([0,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par $\forall (f, g) \in E^2$, $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$.

On note encore $F = \{ \underbrace{x \mapsto ax+b}_{g_{a,b}} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \}$

et on voit qu'ainsi on cherche à déterminer

$$d(f, F)^2 \quad (\text{où } f = x \mapsto x^2)$$

$$\int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx = \|f - g_{a,b}\|^2$$

$$\text{on } g = x \mapsto x^2 \\ g_{a,b} = x \mapsto ax + b$$

Cherchons le projeté orthogonal de f sur F , autrement dit on cherche $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tq $f - g_{a,b} \perp F$

Étant donné $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $f - g_{a,b} \perp F$ $F = \text{Vect} \left(\underbrace{g_{0,1}}_{x \mapsto 1}, \underbrace{g_{1,0}}_{x \mapsto x} \right)$

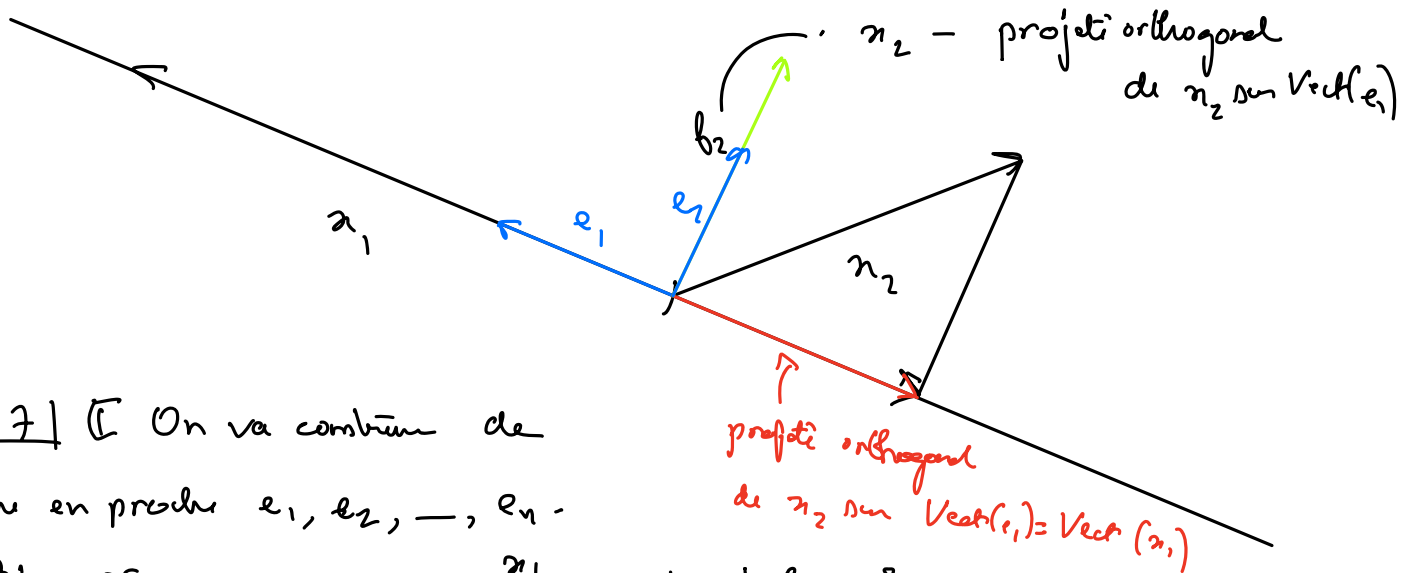
ssi $f - g_{a,b} \perp g_{0,1}$ et $f - g_{a,b} \perp g_{1,0}$

ssi $\int_0^1 (x^2 - ax - b) \times 1 dx = \int_0^1 (x^2 - ax - b) \times x dx = 0$

ssi $\frac{1}{3} - \frac{a}{2} - b = \frac{1}{4} - \frac{a}{3} - \frac{b}{2} = 0$ ssi $(a,b) = (1, -\frac{1}{6})$

et le projeté orthogonal de f sur F est $x \mapsto x - \frac{1}{6}$.

Mais alors $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx = \int_0^1 (x^2 - (x - \frac{1}{6}))^2 dx$
 $= \int_0^1 (x^2)^2 dx - \int_0^1 (x - \frac{1}{6})^2 dx$ d'après Pythagore
 car $x \mapsto x^2 - (x - \frac{1}{6})$
 et $x \mapsto x - \frac{1}{6}$ sont
 orthogonales
 $= \frac{1}{5} - \dots = \frac{1}{180} \quad \square$



Thm 17 [On va construire de
 proche en proche $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Bien sûr, on pose $e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$ qui est le seul
 vecteur tel que $\|e_1\| = 1$, $\text{Vect}(e_1) = \text{Vect}(x_1)$ et $\langle e_1, x_1 \rangle > 0$.

Soit $k \in [1, n-1]$ et supposons construits $(e_1, \dots, e_k)$ répondant
 à toutes les conditions

Le projeté orthogonal de x_{k+1} sur $\text{Vect}(x_1, \dots, x_k) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$
 est $\langle x_{k+1}, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle x_{k+1}, e_k \rangle e_k$ (Th 14)

et on pose $b_{k+1} = x_{k+1} - (\langle x_{k+1}, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle x_{k+1}, e_k \rangle e_k)$
 et on a donc $b_{k+1} \perp \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$.

Comme $x_{k+1} \notin \text{Vect}(x_1, \dots, x_k)$, alors $b_{k+1} \notin \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$
 et ainsi $b_{k+1} \neq 0$ et on peut alors poser $e_{k+1} = \frac{b_{k+1}}{\|b_{k+1}\|}$.
 et on a alors $(e_1, \dots, e_{k+1})$ orthonormée.

De plus, $\text{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1}) \subset \text{Vect}(x_1, \dots, x_{k+1})$ et il y a
 égalité des dimensions $(k+1)$ on a $\text{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1}) = \text{Vect}(x_1, \dots, x_{k+1})$.

Enfin, $\langle b_{k+1}, x_{k+1} \rangle = \|x_{k+1}\|^2 - (\langle x_{k+1}, e_1 \rangle^2 + \dots + \langle x_{k+1}, e_k \rangle^2)$

$$\text{or } x_{k+1} = b_{k+1} + \langle x_{k+1}, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle x_{k+1}, e_k \rangle e_k$$

et, d'après Pythagore :

$$\|x_{k+1}\|^2 = \|b_{k+1}\|^2 + \langle x_{k+1}, e_1 \rangle^2 + \dots + \langle x_{k+1}, e_k \rangle^2$$

$$\text{donc } \langle b_{k+1}, x_{k+1} \rangle = \|b_{k+1}\|^2 > 0$$

Ainsi $(e_1, \dots, e_{k+1})$ convient...

Pour l'inverse, voir cdp. $\square$