$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^n(x)}{x^2}\,dx \longrightarrow ?$$

Posons $\forall n,\ f_n(x) = \dfrac{|\sin^n x|}{x^2}$

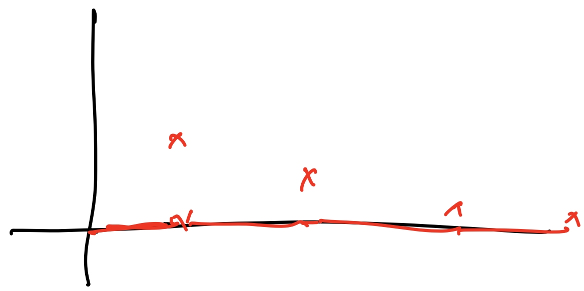
On remarque que (f_n) converge simplement vers

$$f : \begin{cases} x \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \longmapsto \frac{1}{x^2} \\ x \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \longmapsto 0 \end{cases}$$ continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$

$\forall x \in [0,1],\ \forall n \geq 2,\ 0 \leq f_n(x) \leqslant x^{n-2}$ (car $0 \leq \sin x \leqslant x$)

$\leqslant 1$

et $\forall x > 1,\ \forall n \geqslant 2,\ 0 \leq f_n(x) \leq \dfrac{1}{x^2}$



or, en notant $\varphi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \in [0,1] \longmapsto 1$

$x > 1 \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$

φ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}^+$

donc d'après le thm de convergence dominée,

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx \longrightarrow \underbrace{\int_0^{+\infty} f(x)\,dx}_{=0}$$

$|u_n| \leqslant \varepsilon_n$

$|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon_n$

Enfin, $$\left|\int_0^{+\infty} \frac{\sin^n(x)}{x^2}\,dx\right| \leqslant \underbrace{\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin^n(x)}{x^2}\right| dx}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

Donc $$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^n(x)}{x^2}\,dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

<u>Exemple 191</u>

$$\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$$

On peut noter que $(P,Q) \mapsto \langle P,Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$ est, sur $\mathbb{R}[X]$, un produit scalaire.

On a en effet vu (exemple 4) que si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est continue et $\int_0^1 f^2(t)\,dt = 0$ alors $\forall t \in [0,1],\ f(t) = 0$

De ce fait, si $\langle P, P\rangle = 0$, alors P admet une infinité de racines et est donc le polynôme nul.

La bilinéarité et la symétrie sont faciles, et $\langle \cdot, \cdot\rangle$ forme donc bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

On orthogonalise $(1, X, X^2)$ en (Q_0, Q_1, Q_2) (et on normalise à la fin)

On pose $Q_0 = 1$,

puis $\langle Q_0, Q_0\rangle = \int_0^1 1^2 \, dt = 1$

On pose ensuite $Q_1 = X - \underbrace{\boxed{\frac{\langle X, Q_0\rangle}{\langle Q_0, Q_0\rangle} Q_0}}_{}$

projeté orthogonal de X sur $\mathrm{Vect}(Q_0)$

$Q_1 = X - \alpha Q_0$
tq $\langle Q_1, Q_0\rangle = 0$
$\langle X, Q_0\rangle - \alpha \langle Q_0, Q_0\rangle = 0$
$\alpha = \dfrac{\langle X, Q_0\rangle}{\langle Q_0, Q_0\rangle}$.

$$\langle X, Q_0\rangle = \int_0^1 t \times 1 \, dt = \frac{1}{2}$$

et ainsi $Q_1 = X - \frac{1}{2}$

$$\langle Q_1, Q_1\rangle = \int_0^1 \left(t - \tfrac{1}{2}\right)^2 dt = \left[\frac{1}{3}\left(t-\frac{1}{2}\right)^3\right]_0^1 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

<u>Variante</u> : $X = \frac{1}{2} Q_0 + Q_1$ donc d'après l'identité de Pythagore

$\|X\|^2 = \frac{1}{4}\|Q_0\|^2 + \|Q_1\|^2$ et donc

$\|Q_1\|^2 = \|X\|^2 - \frac{1}{4}\|Q_0\|^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

On pose ensuite $\overline{Q_2 = X^2} - \underbrace{\left[\frac{\langle X^2, Q_0\rangle}{\langle Q_0, Q_0\rangle} Q_0 + \frac{\langle X^2, Q_1\rangle}{\langle Q_1, Q_1\rangle} Q_1\right]}_{}$

projeté orthogonal de X^2 sur $\mathrm{Vect}(Q_0, Q_1) = \mathrm{Vect}(1, X) = \mathbb{R}_1[X]$

$$\langle X^2, Q_0\rangle = \int_0^1 t^2 \times 1 \, dt = \frac{1}{3}$$

$$\langle X^2, Q_1\rangle = \int_0^1 t^2 \times \left(t - \tfrac{1}{2}\right) dt = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

Ainsi $Q_2 = X^2 - \frac{1}{3} Q_0 - Q_1 = X^2 - \left(X - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3} = X^2 - X + \frac{1}{6}$

Puis $\|X^2\|^2 = \|Q_2\|^2 + \frac{1}{9}\|Q_0\|^2 + \|Q_1\|^2$

et ainsi $\|Q_2\|^2 = \frac{1}{5} - \frac{1}{9} \times 1 - \frac{1}{12} = \frac{36 - 20 - 15}{180} = \frac{1}{180}$

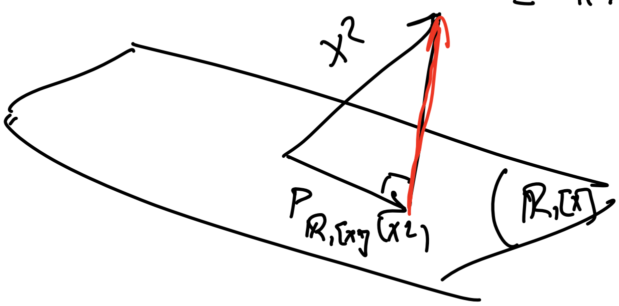
Ainsi, l'orthonormalisée (selon Gram-Schmidt) de $(1, X, X^2)$ est $\left(1, 2\sqrt{3}\left(X-\frac{1}{2}\right), 6\sqrt{5}\left(X^2-X+\frac{1}{6}\right)\right)$.

Exo 2 : $\underbrace{\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \boxed{\int_0^1 (x^2-ax-b)^2\,dx}}$ $= \|X^2-aX-b\|^2$

$= d(X^2, \mathbb{R}_1[X])^2$

$= \|X^2 - \underbrace{P_{\mathbb{R}_1[X]}(X^2)}\|^2$

projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$ lequel est $X-\frac{1}{6}$ d'après les calculs précédents.



Donc $\inf \int_0^1 \text{———} = \|X^2-(X-\frac{1}{6})\|^2$

$= \|Q_2\|^2 = \frac{1}{180}$.

Exemple 21 : $e_i = \begin{pmatrix} 0\\ |\\ 0\\ 1\\ 0\\ |\\ 0 \end{pmatrix} i$, $e_j = \begin{pmatrix} 0\\ |\\ 0\\ 1\\ 0\\ |\\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j$ $\quad \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{i,j}$ $\left(= 1 \text{ si } i=j,\ 0 \text{ sinon}\right)$

Exemple : On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire :

$$\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k b_k \quad \text{où} \quad P(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k,\ Q(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k.$$

alors $\langle X^k, X^\ell\rangle = \delta_{k,\ell}$

Ainsi, pour tout n, $(1, X, \ldots, X^n)$ est orthonormale pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$

P 22 | E de dimension finie admet une base $(x_1, \ldots, x_n)$

Son orthonormalisée (selon Gram-Schmidt) $(e_1, \ldots, e_n)$ forme alors une base orthonormale de E. (C'est une famille libre car orthonormale, et elle compte $n = \dim E$ vecteurs).

Si maintenant $(e_1, \ldots, e_p)$ est une famille orthonormale de E, alors $(e_1, \ldots, e_p)$ est libre et on peut donc la compléter en $(e_1, \ldots, e_p, x_{p+1}, \ldots, x_n)$ une base de E.

Son orthonormalisée $(e'_1, \ldots, e'_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ selon Gram-Schmidt est donc une base orthonormale de E.

De plus, $(e'_1, \ldots, e'_p)$ n'est autre que l'orthonormalisée de $(e_1, \ldots, e_p)$ et, de l'unicité de l'orthonormalisée de $(e_1, \ldots, e_p)$ on a bien sûr $(e'_1, \ldots, e'_p) = (e_1, \ldots, e_p)$

$(e_1, \ldots, e_p)$ convient manifestement aussi !

]

<u>Exercice</u> : Soit E euclidien muni de $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ orthonormale, et soit $x \in E$. Quelles sont les coordonnées de x selon $\mathcal{B}$?

[On va montrer qu'il s'agit de $(\langle x, e_1\rangle, \ldots, \langle x, e_n\rangle)$

<u>Méthode 1</u> : Notons $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ les coordonnées de x selon $\mathcal{B}$.

Ainsi $x = x_1 . e_1 + \cdots + x_n . e_n$

Mais alors, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, $\langle x, e_i\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \overbrace{\langle e_j, e_i\rangle}^{= \delta_{ji}}$

$= x_i$

<u>Méthode 2</u> : D'une part, le projeté orthogonal de x sur E est x, d'autre part, il s'agit de $\sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i$

et donc $x = \langle x, e_1\rangle e_1 + \cdots + \langle x, e_n\rangle . e_n$.]

P.<u>23</u>|

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ | \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ | \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\langle x, y\rangle = \sum x_i y_i = X^T Y = \langle X, Y\rangle$$

[$\langle x, y\rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} x_k . e_k, \sum_{l=1}^{n} y_l . e_l\rangle$

$= \sum_{k=1}^{n} x_k \langle e_k, \sum_{l=1}^{n} y_l . e_l\rangle$

$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} x_k y_l \underbrace{\langle e_k, e_l\rangle}_{\delta_{k,l}}$

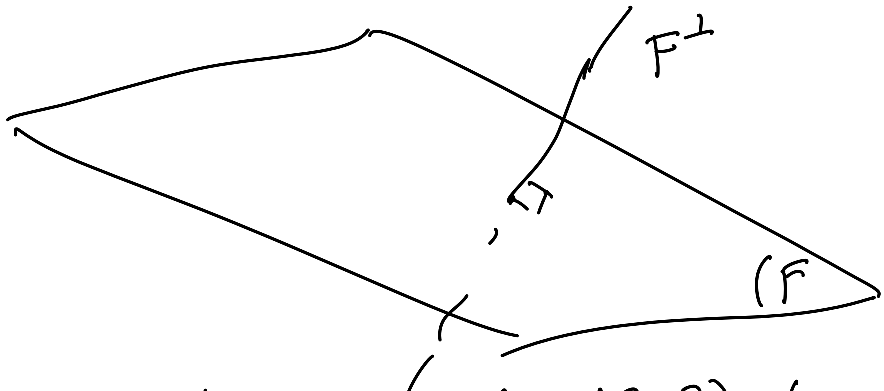
$= \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$.]

P.<u>24</u>| [On sait déjà que si E est préhilbertien et que si

F sev de E dispose d'une base orthonormale $(e_1, \dots, e_p)$ alors $E = F \oplus F^\perp$.

Ici F sev de E est bien sûr de dimension finie, et on peut le munir d'une base orthonormale (en orthonormalisant n'importe laquelle de ses bases).

On a donc bien $E = F \oplus F^\perp$.]



<u>Exercice</u> : Notons $E = C([a,b], \mathbb{R})$ (où $a<b$ sont deux réels) et notons $F = \{ f \in E \mid f(a) = 0 \}$

On munit E du produit scalaire :

$$(f,g) \mapsto \langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) g(t) \, dt.$$

Déterminer $F^\perp$

[Soit $g \in F^\perp$, (c-à-d dès lors que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue s'annule on a alors $\int_a^b f(t) g(t) \, dt = 0$)

Mais alors, en posant

$$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto (t-a) \, g(t) \qquad G \subset \{0\}$$

Mais alors $f \in F$ et

donc $\langle f, g \rangle = 0 = \int_a^b (t-a) \, g^2(t) \, dt$

or $t \mapsto (t-a) g^2(t)$ est continue sur $[a,b]$, positive et d'intégrale nulle sur $[a,b]$ (qui n'est pas un singleton) alors elle est identiquement nulle et ainsi

$\forall t \in]a,b]$, $g(t) = 0$ et donc $g = 0$

Donc $F^\perp = \{0\}$.

On n'a donc pas ici $\underbrace{F \oplus F^{\perp}}_{= F \neq E} = E$.]

Suites et séries de fonctions : exo 21

prébilbertien : exo 3, 5

Exo 21 | $f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n^2 x}$.

a) Soit $x > 0$, $e^{-n^2 x} \underset{n \to +\infty}{=} o\left(e^{-nx}\right)$ et $\sum e^{-nx}$ cvge

(série géométrique de raison $e^{-x} < 1$)

On note $\forall n$, $f_n = x \mapsto e^{-n^2 x}$.

alors $\|f_n\|_\infty^{]0,+\infty[} = 1$ et $\sum 1$ diverge grossièrement

donc $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}^{+*}$.

b) Soit $a > 0$, $\|f_n\|_\infty^{[a,+\infty[} = e^{-n^2 a}$

or $\sum e^{-n^2 a}$ converge donc $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.

Comme de plus, $\forall n$, f_n est continue alors f est continue sur $\bigcup_{a>0} [a, +\infty[=]0, +\infty[$.

c) $f - 1$ est la fonction $\sum_{n \geq 1} f_n$. (car $f_0 = 1$)

On pense au thm d'intégration terme à terme.

pour tout $n \geq 1$, f_n est intégrable et

$$\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\, dx = \int_0^{+\infty} f_n(x)\, dx = \int_0^{+\infty} e^{-n^2 x}\, dx$$

$$= \left[-\frac{1}{n^2} e^{-n^2 x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{n^2}.$$

or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge donc d'après le thm d'intégration terme à terme, $f - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$

et, de plus, $$\int_0^{+\infty} (f(x) - 1)\, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\, dx$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \left(= \frac{\pi^2}{6}\right).$$

d) Si f est intégrable (hypothèse absurde)

alors $1 = f - (f-1)$ est intégrable à son tour,

ce qui n'est pas.

e) Soit $x>0$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n^2 x}$

$t \mapsto e^{-t^2 x}$ est, sur $\mathbb{R}^+$ continue, décroissante

et intégrable en $+\infty$ $\left(\underset{t\to+\infty}{o}\left(e^{-tx}\right) \text{ et } t \mapsto e^{-tx} \text{ est intégrable en } +\infty \right)$

et, pour $n>0$:

$$\int_n^{n+1} e^{-t^2 x}\,dt \underbrace{\leqslant}_{\text{valable aussi si } n=0} e^{-n^2 x} \leqslant \int_{n-1}^{n} e^{-t^2 x}\,dt$$

en sommant de $n=0$ à l'infini :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2 x}\,dt \leqslant f(x) \leqslant \underbrace{e^{-0^2 x}}_{1} + \int_0^{+\infty} e^{-t^2 x}\,dt$$

f) Etant donné $x>0$,

$\int_0^{+\infty} e^{-t^2 x}\,dt$ on pose $u = t\sqrt{x}$

($t \mapsto t\sqrt{x}$ réalise une bijection strictement croissante de classe C^1 de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$

donc, par un changt de variable

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2 x}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} \times \frac{du}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Ainsi $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}} \leqslant f(x) \leqslant 1 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}$

et donc $$\underbrace{1}_{} \leqslant \frac{f(x)}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}} \leqslant \underbrace{1 + \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}}}_{\xrightarrow[x\to 0^+]{} 1}$$

donc $\boxed{f(x) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}}$

3. $V = \mathrm{Vect}(i - 3k)^{\perp}$.

Notons $n = i - 3k$ et $D = \mathrm{Vect}(i - 3k)$,

Le projeté orthogonal de $x \in E$ sur D a pour expression :

$$\frac{\langle x, n\rangle}{\langle n, n\rangle} n.$$

Comme $V = D^{\perp}$ alors le projeté orthogonal de x sur V est $x - \frac{\langle x, n\rangle}{\langle n, n\rangle} n$. $\left(E = D \overset{\perp}{\oplus} V \right)$

$$p_V(i) = i - \frac{\langle i, n\rangle}{\langle n, n\rangle} n$$

$$= i - \frac{1}{10} \cdot (i - 3k)$$

de coordonnées $\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$