P.25 | [Supposons $\mathcal{B}' \in \mathcal{B}^+$, c-à-d $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$

et soit $\mathcal{B}'' \in \mathcal{B}^+$ alors $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}'') > 0$

or $\det_{\mathcal{B}'}(\cdot) = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \cdot \det_{\mathcal{B}}(\cdot)$

donc $$\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}'') = \underbrace{\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})}_{= \frac{1}{\det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}'} > 0} \underbrace{\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}'')}_{> 0}$$

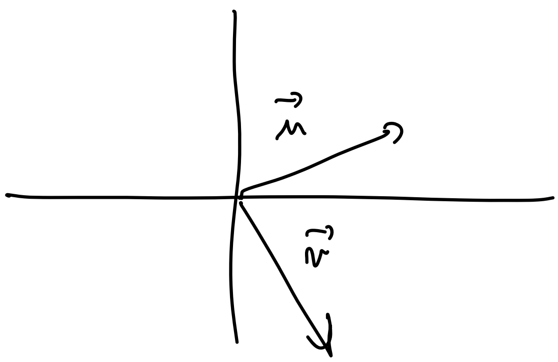
ainsi $\mathcal{B}'' \in \mathcal{B}'^+$.

Ainsi $\mathcal{B}^+ \subset \mathcal{B}'^+$ et on montre de même $\mathcal{B}'^+ \subset \mathcal{B}^+$, $\mathcal{B}^- \subset \mathcal{B}'^-$ et $\mathcal{B}'^- \subset \mathcal{B}^-$.]

Dans $\mathbb{R}^2$ orienté par la base canonique $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$

$\vec{u} = (2,1)$, $\vec{v} = (1,-2)$

$$\det_{(\vec{e_1}, \vec{e_2})}(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5$$



$(\vec{u}, \vec{v})$ est une base indirecte de $\mathbb{R}^2$.

P.29 | [Soit $u \in L_{\mathbb{R}}(E)$.

On suppose que $\forall (x,y) \in E^2$, $\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$

Mais alors, $\forall x \in E$, $\|u(x)\| = \sqrt{\langle u(x), u(x) \rangle} = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \|x\|$

et ainsi $u \in O(E)$.

Supposons réciproquement $u \in O(E)$ et soit $(x,y) \in E^2$,

alors $\langle u(x), u(y) \rangle = \frac{1}{2}\left(\|u(x)+u(y)\|^2 - \|u(x)\|^2 - \|u(y)\|^2 \right)$ (polarisation)

$= \frac{1}{2}\left(\|u(x+y)\|^2 - \|u(x)\|^2 - \|u(y)\|^2 \right)$

$= \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$ (car $u \in O(E)$)

$= \langle x, y \rangle$ (polarisation).]

P.30 | [Supposons $u \in O(E)$, alors

$\forall (i,j),\ \langle u(e_i), u(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j}$

et donc $(u(e_1), -, u(e_n))$ est orthonormale.

Supposons réciproqt $u \in L_{\mathbb{R}}(E)$ et $(u(e_1), -, u(e_n))$ orthonormale.

et soit x, y élts de E dont les coordonnées selon $\mathcal{B}$ forment $(x_1, -, x_n)$

et $(y_1, -, y_n)$.

Alors $\langle u(x), u(y) \rangle = \langle \sum_{i=1}^n x_i\, u(e_i), \sum_{j=1}^n y_j\, u(e_j) \rangle$

$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i\, y_j\, \langle u(e_i), u(e_j) \rangle$

$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i\, y_j\, \delta_{i,j}$

$= \sum_{i=1}^n x_i\, y_i = \langle x, y \rangle$ (cf P.23)

P.29

Ainsi $u \in O(E)$.]

P.32 | [Bien sûr $Id_E \in L_{\mathbb{R}}(E)$ et $\forall x \in E,\ \|Id_E(x)\| = \|x\|$

donc $Id_E \in O(E)$.

Soit $(f, g) \in O(E)^2$,

et soit $x \in E$ alors $\|f \circ g(x)\| = \|f(g(x))\|$

$= \|g(x)\|$ car $f \in O(E)$

$= \|x\|$ car $g \in O(E)$

Ainsi $f \circ g \in O(E)$.

Supposons enfin $u \in O(E)$, on sait déjà que u est un automorphisme de E (car transforme une base orthonormée en une base (orthonormée) de E).

et soit $(x, y) \in E^2$, alors

$\langle u^{-1}(x), u^{-1}(y) \rangle = \langle u(u^{-1}(x)), u(u^{-1}(y)) \rangle$ car $u \in O(E)$

$= \langle x, y \rangle$ et ainsi $u^{-1} \in O(E)$.]

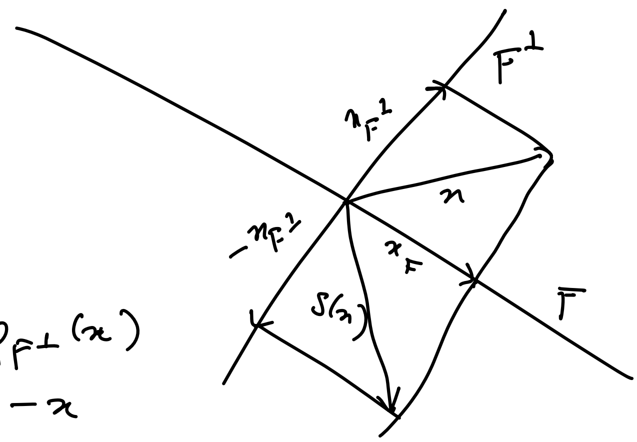
Exercice 3 | [On note p_F, $p_{F^\perp}$ les projecteurs orthogonaux sur F et $F^\perp$.

$$E = F \oplus F^\perp$$

$$x = x_F + x_{F^\perp}$$

$$s(x) = \underbrace{x_F}_{=p_F(x)} - \underbrace{x_{F^\perp}}_{=p_{F^\perp}(x)}$$

$$s(x) = x - 2x_{F^\perp} = x - 2p_{F^\perp}(x)$$
$$= 2x_F - x = 2p_F(x) - x$$



$$F = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 0 \}$$
$$= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \langle (x,y,z), n \rangle = 0 \} \text{ en posant } n = (1,1,1)$$
$$= \mathrm{Vect}(n)^\perp$$

Ainsi $\forall x (= (x_1, x_2, x_3)) \in \mathbb{R}^3$,
$$s(x) = x - 2p_{F^\perp}(x) = x - 2\frac{\langle x, n \rangle}{\langle n, n \rangle} n.$$

Ainsi $s((1,0,0)) = (1,0,0) - \frac{2}{3}(1,1,1)$
$s((0,1,0)) = (0,1,0) - \frac{2}{3}(1,1,1)$ ...

Donc $\mathrm{Mat}_{\mathrm{can}_{\mathbb{R}^3}}(s) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$]

P.36 | [Par hypothèse $u(F) \subset F$ donc u induit un endomorphisme de F. Celui-ci est toujours injectif et F est de dimension finie, donc u réalise un automorphisme de F.

De ce fait, $u(F) = F$.

Soit maintenant $x \in F^\perp$, et soit $y \in F$,

alors il existe $t \in F$ (unique) tq $u(t) = y$ (u réalisant une bijection de F dans F)

Ainsi $\langle u(x), y \rangle = \langle u(x), u(t) \rangle$
$$= \langle \underbrace{x}_{\in F^\perp}, \underbrace{t}_{\in F} \rangle = 0$$

Ainsi $u(x) \perp F$ et ceci montre que $u(F^\perp) \subset F^\perp$.

Comme dans la première partie, on montre alors que $u(F^\perp) = F^\perp$.]

<u>Exemple</u> : $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in O(3)$

<u>Oubli</u> : Proposition 35]

[Soit s une symétrie vectorielle de E.

Supposons que s soit la symétrie orthogonale d'axe F.

et soit $x \in E$, il existe donc $(x_F, x_{F^\perp}) \in F \times F^\perp$ unique

tq $x = x_F + x_{F^\perp}$.

Alors $s(x) = x_F - x_{F^\perp}$.

Puis $\|s(x)\|^2 = \|x_F - x_{F^\perp}\|^2 = \|x_F\|^2 + \|-x_{F^\perp}\|^2$

$= \|x_F\|^2 + \|x_{F^\perp}\|^2 = \|x_F + x_{F^\perp}\|^2 = \|x\|^2$

Ainsi $s \in O(E)$

Supposons réciproqt que s soit une isométrie vectorielle

Notons F l'axe de s et G sa direction. (On va montrer que $F \perp G$)

et soit $x \in F$ et $y \in G$,

$\langle x, y\rangle = \langle s(x), s(y)\rangle$

$= \langle x, -y\rangle = -\langle x, y\rangle$

et ainsi $\langle x, y\rangle = 0$.

Donc $F \perp G$ ce qui montre que s est une symétrie orthogonale.].

$O(n)$, $O_n(\mathbb{R})$

<u>P 39</u>]

$X^T Y$

$M^T M$