P 39

Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$, de vecteurs colonnes $C_1, \ldots, C_n$, et on note $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M.

Ainsi M est orthogonale ssi f est une isométrie vectorielle

ssi $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est orthonormale

ssi $(C_1, \underline{\quad\quad}, C_n)$ est orthonormale.

Puis en notant $M^T M = (b_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$

on a, pour tout i,j,

$b_{i,j} = C_i^T C_j = \langle C_i, C_j \rangle$

$$\begin{pmatrix} C_1^T \\ \vdots \\ C_i^T \\ \vdots \\ C_n^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_j & \cdots & C_n \end{pmatrix} = \begin{array}{cc} & j \\ \left(\begin{array}{ccc} & & \\ & \boxed{C_i^T C_j} & \\ & & \end{array} \right) & i \end{array}$$

Ainsi $(C_1, \ldots, C_n)$ est orthonormale ssi $\forall (i,j), \langle C_i, C_j \rangle \underset{(=b_{i,j})}{=} \delta_{i,j}$

ssi $M^T M = I_n$.

Enfin, il est bien connu que $A \in M_n(\mathbb{R})$ est inversible d'inverse B ssi $AB = I_n$ ssi $BA = I_n$ et donc

i, ii et iii sont équivalentes. $\square$

<u>Exercice</u> : Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$ où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^2$.

A quelle condition, nécessaire et suffisante $M \in O_3(\mathbb{R})$?

[en notant (C_1, C_2, C_3) les vecteurs colonnes de M,

alors $M \in O_3(\mathbb{R})$ ssi (C_1, C_2, C_3) est orthonormale

$$\text{ssi } \begin{cases} a^2+b^2+c^2 = 1 \\ ab+bc+ca = 0 \end{cases}$$

N.B. : si ces conditions sont satisfaites, alors l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé est une symétrie orthogonale car

$M^2 = M^T M = I_3$ (et f est une isométrie + une symétrie donc une symétrie orthogonale : cf P.35).]

Thm 40 | [Supposons $M = \mathrm{Mat}_B(x_1, \dots, x_n)$ et notons $(C_1, \dots, C_n)$ les vecteurs colonnes de M.

Alors, de l'expression du produit scalaire selon une base orthonormale, on déduit que, pour tout (i,j)

$$\langle x_i, x_j \rangle = C_i^T C_j = \langle C_i, C_j \rangle$$

produit scalaire de E — produit scalaire de $\mathbb{R}^n$.

Ainsi $(x_1, \dots, x_n)$ est orthonormale (et donc une base orthonormale de E)

ssi $(C_1, \dots, C_n)$ est orthonormale (et donc une bon de $\mathbb{R}^n$)

ssi $M \in O_n(\mathbb{R})$.

Si maintenant $M = \mathrm{Mat}_B(u)$ alors $M = \mathrm{Mat}_B(u(e_1), \dots, u(e_n))$

Donc $M \in O_n(\mathbb{R})$ ssi $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est orthonormale

ssi $u \in O(E)$.]

P.41 | [Supposons M, N élts de $O_n(\mathbb{R})$

alors $(MN)^T MN = N^T \underbrace{M^T M}_{I_n} N = N^T N = I_n$

donc $MN \in O_n(\mathbb{R})$.

Bien sûr $I_n^T I_n = I_n$ donc $I_n \in O_n(\mathbb{R})$

et, si $M \in O_n(\mathbb{R})$, M est inversible d'inverse M^T

et M^T est donc aussi inversible d'inverse $M = (M^T)^T$

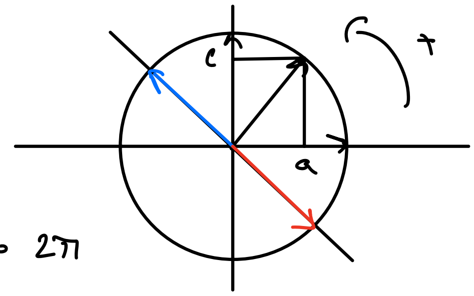
et donc $M^T \in O_n(\mathbb{R})$.]

P.42) [Si $M \in O_n(\mathbb{R})$ alors $M^T M = I_n$

donc $\det(M^T M) = 1$

c-à-d $\boxed{\det(M)^2 = 1}$ donc $\det(M) \in \{-1, 1\}$.]

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$



On suppose $M \in SO_2(\mathbb{R})$.

alors $a^2 + c^2 = 1$

et il existe $\theta \in \mathbb{R}$ unique modulo 2π

tq $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$

Puis $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ et on en déduit que

$$\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

ou $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix}$

or $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1$ donc il vient $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$

$$\text{Donc } M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = R_\theta$$

Si maintenant $M \in O_2(\mathbb{R}) \setminus SO_2(\mathbb{R})$

alors M prend la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = \Sigma_\theta$

P44) [

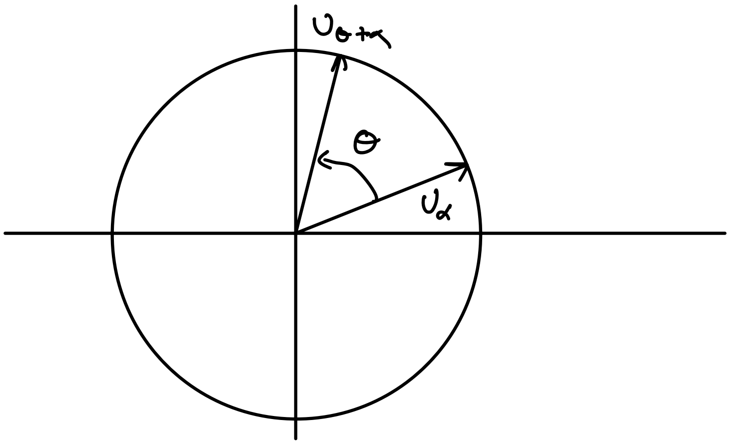
$$R_\theta \times R_{\theta'} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\theta' & -\sin\theta' \\ \sin\theta' & \cos\theta' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta') \\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') \end{pmatrix} = R_{\theta+\theta'}$$

$$\Sigma_\theta \times \Sigma_{\theta'} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\theta' & \sin\theta' \\ \sin\theta' & -\cos\theta' \end{pmatrix}$$

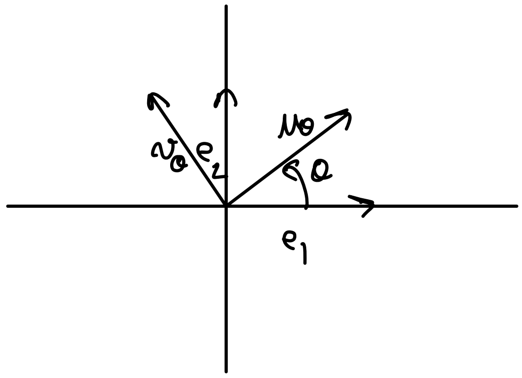
$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta-\theta') & -\sin(\theta-\theta') \\ \sin(\theta-\theta') & \cos(\theta-\theta') \end{pmatrix} = R_{\theta-\theta'} \cdots]$$

$R_\theta U_\alpha = U_{\theta+\alpha}$.



$u_\theta = \cos\theta\, e_1 + \sin\theta\, e_2$

$v_\theta = -\sin\theta\, e_1 + \cos\theta\, e_2$



P.45 [Si $f \in O(E)$ alors

$\mathrm{Mat}_B(f) \in O_2(\mathbb{R})$

et $\det(f) = \det(\mathrm{Mat}_B(f)) \in \{-1,1\}$.]

T47 [On suppose r une rotation de E alors

$M_1 = \mathrm{Mat}_{B_1}(r) \in O_2(\mathbb{R})$ (matrice d'une isométrie selon une base orthonormale)

de plus $\det(M_1) = \det(r) = 1$

donc $M_1 \in SO_2(\mathbb{R})$ et il existe donc θ_1 unique modulo 2π tq $M_1 = R_{\theta_1}$.

De m̂, il existe θ_2 (unique modulo 2π) tq $M_2 = \mathrm{Mat}_{B_2}(r)$
$= R_{\theta_2}$.

De plus $P_{B_1 \to B_2} \in O_2(\mathbb{R})$ (car c'est la matrice de B_2, orthonormale, selon la base orthonormale B_1).

De plus B_1 et B_2 sont directes donc $\det(P_{B_1\to B_2}) > 0$

Ainsi $P_{B_1 \to B_2} \in SO_2(\mathbb{R})$ et il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}$ tq

$P_{B_1\to B_2} = R_\alpha$.

Enfin $P_{B_2 \to B_1} = (P_{B_1\to B_2})^{-1} = (R_\alpha)^{-1} = R_{-\alpha}$

(en effet : $R_\alpha \times R_{-\alpha} = R_0 = I_2$)

On a alors, par la formule de changement de base :

$\mathrm{Mat}_{B_2}(r) = M_2 = R_{\theta_2} = P_{B_2\to B_1}\, {}_{B_1}M_{1 B_1}\, P_{B_1\to B_2} = R_{-\alpha} R_{\theta_1} R_\alpha$

$$M_2 = \underline{R_{-\alpha+\theta_1+\alpha}} = R_{\theta_1} = M_1 \ . \ ]]$$

P.501 [Soit $s \in O(E)$ tq $\det(s) = -1$, $B = (e_1, e_2)$ une base orthonormale directe de E, on note toujours pour tout θ,

$$u_\theta = \cos\theta . e_1 + \sin\theta . e_2 .$$

On a $Mat_B(s) \in O_2(\mathbb{R}) \setminus SO_2(\mathbb{R})$

Il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}$ tq $Mat_B(s) = \Sigma_\alpha$.

On rappelle que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\Sigma_\alpha U_\theta = U_{\alpha-\theta}$ (cf. P_{44})

et on a donc $\forall \theta$, $f(u_\theta) = u_{\alpha-\theta}$.

On en déduit que $f(u_{\frac{\alpha}{2}}) = u_{\frac{\alpha}{2}}$ et $f(u_{\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{2}}) = u_{\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{2}}$

$$= -u_{\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{2}}$$

(ou encore $f(u_{\frac{\alpha}{2}}) = u_{\frac{\alpha}{2}}$, $f(v_{\frac{\alpha}{2}}) = -v_{\frac{\alpha}{2}}$).

On reconnaît une symétrie vectorielle, d'axe $Vect(u_{\frac{\alpha}{2}})$ et de direction $Vect(v_{\frac{\alpha}{2}})$.

Remarque : On aurait pu se contenter de remarquer que $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$

$Mat_B(f) = \Sigma_\alpha$, puis que $\Sigma_\alpha^2 = R_{\alpha-\alpha} = I_2$

donc $f^2 = Id_E$ et f est une symétrie vectorielle. Comme de plus $f \in O(E)$ alors f est une symétrie orthogonale.

Enfin $Tr(f) = Tr(\Sigma_\alpha) = 0$ donc il ne peut s'agir que d'une réflexion.]].

Supplément : Angles orientés dans le plan (E muni de $B = (e_1, e_2)$ orthonormale directe)

Si $x \neq 0$ et $y \neq 0$,

il existe r rotation de E unique tq $r\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \frac{y}{\|y\|}$.

L'angle orienté de x à y est défini comme l'angle de cette rotation r, on pourra noter (x,y) ou $\widehat{(x,y)}$ celui-ci.

Pté : Soit x, y non nuls et θ l'angle orienté de x à y alors

$$\langle x,y\rangle = \|x\| . \|y\| \cos\theta , \quad \det_B(x,y) = \|x\| . \|y\| \sin\theta$$

[On complète $\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$ en $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$ une base orthonormée directe de E.

Si r est la rotation de E tq $r\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \frac{y}{\|y\|}$, la matrice de r selon $\mathcal{B}'$ est toujours :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$ et on a alors, comme $x = \|x\| e'_1$

alors $$r(e'_1) = \frac{y}{\|y\|}.$$

$$= \cos\theta \, e'_1 + \sin\theta \, e'_2$$

donc $y = \|y\| \left(\cos\theta \, e'_1 + \sin\theta \, e'_2 \right)$

tandis que $x = \|x\| \, e'_1$

Donc $\langle x, y \rangle = \|x\| \times \|y\| \cos\theta + 0 \times \|y\| \sin\theta$

$= \|x\| . \|y\| \cos\theta$

$$\det_{\mathcal{B}}(x,y) = \underbrace{\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')}_{=1} \det_{\mathcal{B}'}(x,y) = \begin{vmatrix} \|x\| & \|y\|\cos\theta \\ 0 & \|y\| \sin\theta \end{vmatrix}$$

car $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont orthonormées directes

$= \|x\| . \|y\| \sin\theta$]

<u>Application</u> : Calculer l'angle orienté de $\vec{u} = (1,2)$ à $\vec{v} = (2,1)$ puis de $\vec{u} = (4,3)$ à $\vec{v} = (-2,3)$

[On note θ une mesure de $(\vec{u}, \vec{v})$

alors $\cos\theta = \dfrac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| . \|\vec{v}\|} = \dfrac{4}{5}$

de plus $\sin\theta$ est du signe de $\det_{can}(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$

donc $\sin\theta < 0$

Une mesure de $(\vec{u}, \vec{v})$ est donc $-\arccos\left(\frac{4}{5}\right)$.]