$u \in \mathcal{S}(E)$ ssi $\forall (x,y) \in E^2, \quad \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$.

P.531 [Soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(u,v) \in \mathcal{S}(E)^2$,

alors pour tout $(x,y) \in E^2$,

$$\langle (\lambda u + \mu v)(x), y \rangle = \lambda \langle u(x), y \rangle + \mu \langle v(x), y \rangle$$

(linéarité à gauche de $\langle \cdot, \cdot \rangle$)

$$= \lambda \langle x, u(y) \rangle + \mu \langle x, v(y) \rangle \quad \text{car } (u,v) \in \mathcal{S}(E)^2$$

$$= \langle x, (\lambda u + \mu v)(y) \rangle$$

et ainsi $\lambda u + \mu v \in \mathcal{S}(E)$.

Enfin $\mathcal{S}(E)$ est bien une partie non vide de $L_{\mathbb{R}}(E)$ car contient l'identité de E

et on a donc bien $\mathcal{S}(E)$ un sous-espace vectoriel de $L_{\mathbb{R}}(E)$.]

Exercice 4 [Supposons que s soit une symétrie orthogonale de E et soit x,y des élts de E,

en notant F l'axe de s, $(x_F, x_{F^\perp}) \in F \times F^\perp$ et $(y_F, y_{F^\perp}) \in F \times F^\perp$ tq $x = x_F + x_{F^\perp}$, $y = y_F + y_{F^\perp}$ alors $s(x) = x_F - x_{F^\perp}$

et $s(y) = y_F - y_{F^\perp}$

Puis $\langle s(x), y \rangle = \langle x_F - x_{F^\perp}, y_F + y_{F^\perp} \rangle$

$$= \langle x_F, y_F \rangle - \underbrace{\langle x_{F^\perp}, y_F \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle x_F, y_{F^\perp} \rangle}_{=0} - \langle x_{F^\perp}, y_{F^\perp} \rangle$$

$$= \langle x_F + x_{F^\perp}, y_F - y_{F^\perp} \rangle = \langle x, s(y) \rangle.$$

Autre méthode : s étant une symétrie orthogonale, alors $s \in O(E)$ et, pour tout $(x,y) \in E^2$,

$$\langle s(x), y \rangle = \langle s(s(x)), s(y) \rangle = \langle x, s(y) \rangle.$$

Supposons réciproqut que s soit une symétrie vectorielle et que $s \in \mathcal{S}(E)$

notons F l'axe de s et G sa direction et soit $(x,y)\in F\times G$

alors $\langle x,y\rangle = \langle s(x),y\rangle = \langle x, s(y)\rangle = \langle x,-y\rangle$

$= -\langle x,y\rangle$ et donc $x\perp y$

Ainsi $F\perp G$ et s est bien une symétrie orthogonale.

Autre méthode : Soit $(x,y)\in E^2$,

$\langle s(x), s(y)\rangle = \langle x, s(s(y))\rangle$ car $s\in \mathcal{S}(E)$.

$= \langle x,y\rangle$ et ainsi $s\in O(E)$

Ce qui montre alors (cf P35) que s est une symétrie orthogonale.

Lemme 55 | [$u(x)$ a pour coordonnées selon $\mathcal{B}$: MX

y —————— $\mathcal{B}$: Y

D'après l'expression du produit scalaire dans une bon :

$\langle u(x), y\rangle = (MX)^T Y = X^T M^T Y.$

De m̄ $\langle x, u(y)\rangle = X^T (MY)$]

Lemme 56 | [Supposons que $\forall (X,Y)\in M_{n,1}(\mathbb{R})^2,\ X^T MY = 0,$

Posons $M=(a_{i,j})$, $(E_1,\dots,E_n)$ la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$

On a alors $\forall (i,j)$ $E_i^T \underbrace{ME_j}_{C_j \leftarrow j\text{-ème colonne de } M} = 0$

$$(0 \cdots 0\ 1\ 0 \cdots 0)\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j}\end{pmatrix}$$

ainsi $\forall (i,j)$ $a_{i,j}=0$. donc $M=0$

(La réciproque est triviale).]

P. 57 | [Soit $u\in L_{\mathbb{R}}(E)$ et on pose $M=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ alors $u\in \mathcal{S}(E)$ ssi

$\forall (x,y)\in E^2,\quad \langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$

ssi $\forall (X,Y)\in M_{n,1}(\mathbb{R})^2,\ X^T M^T Y = X^T MY$

ssi $\forall (X,Y)\in M_{n,1}(\mathbb{R})^2,\ X^T(M^T - M)Y = 0$

ssi $M^T - M = 0$ ssi M est symétrique.]

Lemme 58| [A peut être vue comme une matrice à coefficients complexes et χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une racine de χ_A, alors il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ non nul tq $AX = \lambda X$.

On note pour toute matrice M à coefficients complexes $\overline{M}$ la matrice de mêmes dimensions que M et dont les coefficients sont ceux de M conjugués.

Mais alors $\overline{X}^T AX = \lambda \overline{X}^T X = \lambda \sum_{i=1}^n |x_i|^2$ en posant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

En transposant et en conjuguant :

$$\overline{(\overline{X}^T AX)}^T = \overline{\lambda} \sum_{i=1}^n |x_i|^2$$

$$= (X^T \overline{A}\, \overline{X})^T$$

$$= \overline{X}^T \underbrace{\overline{A}^T}_{=A} X$$

Mais alors

$$\lambda \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = \overline{\lambda} \sum_{i=1}^n |x_i|^2$$

or $\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \neq 0$ donc $\boxed{\lambda = \overline{\lambda}.}$

Les racines de χ_A sont donc toutes réelles et donc χ_A, scindé sur $\mathbb{C}$, l'est aussi sur $\mathbb{R}$.]

Thm 59| [On procède par récurrence sur $n = \dim E \in \mathbb{N}^*$.

Le résultat est immédiat si $n = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que si E est euclidien de dimension n et si $u \in \mathcal{S}(E)$ alors u est diagonalisable selon une base orthonormale de E.

Supposons E euclidien de dimension $n+1$ et $u \in \mathcal{S}(E)$.

Dans une base de E adaptée (orthonormale) on sait qu'alors la matrice A de u est symétrique et que $\chi_u = \chi_A$ est alors scindé sur $\mathbb{R}$

Notons alors $\lambda \in \mathbb{R}$ une racine de χ_u et soit x un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ.

On pose alors $F = \mathrm{Vect}(x)^\perp$

Montrons que F est stable par u :

Soit $y \in F$,

$$\langle x, u(y) \rangle = \langle u(x), y \rangle \text{ car } u \in \mathcal{S}(E)$$
$$= \langle \lambda . x, y \rangle = \lambda . \langle x, y \rangle = 0$$

donc $u(y) \in \mathrm{Vect}(x)^\perp$ $(= F)$

u induit donc un endomorphisme de F.

Or F est encore un espace euclidien, et $\dim F = n$.

et u réalise encore un endomorphisme autoadjoint de F.

D'après l'hypothèse de récurrence, il existe $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de F formée de vecteurs propres de u.

Mais alors $\left(e_1, \dots, e_n, \frac{x}{\|x\|}\right)$ est une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de u.

ce qui achève la récurrence.]

Thm 60) [Notons u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A, alors $u \in \mathcal{S}(E)$ et il existe donc $\mathcal{B}$ base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ selon laquelle $D = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale.

De plus, en notant $P = \mathrm{Mat}_{\underbrace{can_{\mathbb{R}^n}}}(\mathcal{B})$ alors $P \in O(n)$
bases orthonormales

et on a $${}_{can}A_{can} = P \; {}_{\mathcal{B}}D_{\mathcal{B}} \; P^{-1} = PDP^T. \quad]$$

Lemme : Soit $u \in \mathcal{S}(E)$ de valeurs propres $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$.

alors $\forall x \in E$, $\lambda_1 \|x\|^2 \leq \langle u(x), x \rangle \leq \lambda_n \|x\|^2$

de plus, il existe $x \neq 0$ tq $\lambda_1 \|x\|^2 = \langle u(x), x \rangle$

et il existe $x' \neq 0$ tq $\lambda_n \|x'\|^2 = \langle u(x'), x' \rangle$.

[u autoadjoint donc diagonalisable selon une base orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$. Quitte à renuméroter, on suppose que $\forall i$, $u(e_i) = \lambda_i . e_i$

Mais alors, étant donné $x = x_1 . e_1 + \dots + x_n . e_n \in E$,

$$\langle u(x), x \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i . e_i , \sum_{j=1}^n x_j e_j \right\rangle$$
$$= \sum_{i=1}^n \lambda_i \, x_i^2 \quad \text{or } \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$$

donc $\lambda_1 \left(\sum_{i=1} x_i^2\right) \leqslant \langle u(x), x\rangle \leqslant \lambda_n \sum_{i=1} x_i^2$

et ainsi $\lambda_1 \|x\|^2 \leqslant \langle u(x), x\rangle \leqslant \lambda_n . \|x\|^2$.

Enfin : $\langle u(e_1), e_1\rangle = \langle \lambda_1 e_1, e_1\rangle = \lambda_1 \|e_1\|^2$

$\langle u(e_n), e_n\rangle = \cdots = \lambda_n \|e_n\|^2$.]

P.64| [Supposons $u \in \mathcal{S}(E)$,
et 65 alors $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

et de plus $u \in \mathcal{S}^+(E)$ ssi

$\forall x \in E, \ \langle u(x), x\rangle \geqslant 0$

ssi $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \quad X^T A^T X \ (= X^T A X) \geqslant 0$

ssi $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

On note $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \cdots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de u.

D'après le lemme précédent :

Si $\lambda_1 \geqslant 0$ alors $\forall x \in E, \ \langle u(x), x\rangle \geqslant \lambda_1 \|x\|^2$
$\geqslant 0$

donc $u \in \mathcal{S}^+(E)$

Si réciproqu^t $u \in \mathcal{S}^+(E)$ alors il existe x non nul
tq $\langle u(x), x\rangle = \lambda_1 \|x\|^2$ (lemme précédent)
et $\langle u(x), x\rangle \geqslant 0$ donc $\lambda_1 \geqslant 0$.

Ainsi $u \in \mathcal{S}^+(E)$ ssi $Sp(u) \subset \mathbb{R}^+$.

On raisonne de m̄ pour le caractère défini positif.]

Exo5] [Si $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ alors il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des réels positifs et $P \in O_n(\mathbb{R})$ tq

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} P^T.$$

on pose alors $B = P \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} P^T$

et on a $B^2 = A$ et $B^T = (P^T)^T \begin{pmatrix} \ddots \end{pmatrix} P^T = B$.

Supposons réciproqt qu'il existe $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ tq
$A = B^2$.

<u>Premier méthode</u> : on diagonalise B selon une base orthonormale et on en déduit que A est orthogonalt semblable à une matrice diagonale de coefficients diagonaux positifs : ainsi $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$

<u>Autre méthode</u> : soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$X^T A X = X^T B B X = X^T B^T B X = (BX)^T BX = \|BX\|^2 \geq 0$$

TD exo 10

$u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a, b vecteurs unitaires non colinéaires de $\mathbb{R}^3$

$x \longmapsto u(x) = \langle a, x\rangle b + \langle b, x\rangle a$

a) Mq u est symétrique. (= autoadjoint)

b) Déterminer $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$. u est-il un projecteur orthogonal ?

I a) Soit $(x,y) \in (\mathbb{R}^3)^2$,

$$\langle u(x), y\rangle = \langle \langle a,x\rangle b + \langle b,x\rangle a, y\rangle = \langle a,x\rangle\langle b,y\rangle + \langle b,x\rangle\langle a,y\rangle$$

$$\langle x, u(y)\rangle = \dots = \langle a,y\rangle\langle x,b\rangle + \langle b,y\rangle\langle x,a\rangle$$

$$= \langle u(x), y\rangle.$$ donc $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$.

b) Soit $x \in \operatorname{Ker} u$,

alors $\langle a,x\rangle b + \langle b,x\rangle a = 0$ or (a,b) est libre

donc $\langle a,x\rangle = \langle b,x\rangle = 0$

et ainsi $x \in \operatorname{Vect}(a,b)^\perp$

Réciproqt, si $x \in \operatorname{Vect}(a,b)^\perp$ alors $u(x) = 0$

donc $\boxed{\operatorname{Ker} u = \operatorname{Vect}(a,b)^\perp}$ ← supplémentaire orthogonal d'un plan de $\mathbb{R}^3$: c'est une droite vectorielle.

Manifestt $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Vect}(a,b)$

De plus, par le thm du rang $\operatorname{rg} u + \dim \operatorname{Ker} u = 3$ et $\dim \operatorname{Ker} u = 3-2 = 1$

donc $\operatorname{rg} u = 2$

Ainsi $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(a,b)$ (inclusion + égalité des dimensions)

$$u(a) = \langle a,a\rangle b + \langle b,a\rangle a = b + \langle a,b\rangle a \neq a$$

(car (a,b) est libre)

$\Downarrow$

et donc $b + (\langle a,b\rangle - 1).a \neq 0$)

Ainsi $\operatorname{Im} u$ n'est pas formé que de vecteurs invariants

et donc u n'est pas un projecteur.

<u>Exo 7</u> $M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in M_{2n+1}(\mathbb{R})$

a) $M^2 = ?$

b) Mq M est diagonalisable et en déterminer les élts propres.

I

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 2n+1 \end{pmatrix}$$

b) M est symétrique réelle donc diagonalisable.

0 est valeur propre de M ($C_1 = \cdots = C_{2n}$) d'espace propre associé $\operatorname{Ker} M = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\\-1\\0\end{pmatrix}\right)$ (de dimension $2n-1$)

Si λ est une valeur propre non nulle de M et X un vecteur propre associé,

alors $MX = \lambda X$ donc $X = \frac{1}{\lambda} MX \in \operatorname{Im}(M)$

or $\operatorname{Im} M = \left\{ \begin{pmatrix} a\\ \vdots \\ a \\ b\end{pmatrix} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

Si $X = \begin{pmatrix} a\\ \vdots \\ a \\ b\end{pmatrix}$ est un vecteur propre, alors $b \neq 0$

car $M \begin{pmatrix} a\\ \vdots \\ a \\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ \vdots \\ 0 \\ 2na\end{pmatrix}$ ce qui n'est pas possible.

Mais alors $\frac{1}{b}X = \begin{pmatrix} a/b \\ 1 \\ a/b \\ 1 \end{pmatrix}$ est encore un vecteur propre.

Ainsi, si $\lambda \neq 0$ est une valeur propre de M alors il existe $a \in \mathbb{R}$ tq $X = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$ soit un vecteur propre de M associé à λ.

Soit donc $(a, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$,

$$M \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ssi } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2na+1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ssi} \quad \begin{cases} \lambda a = 1 \\ \lambda = 2na + 1 \end{cases}$$

$$\text{ssi} \quad \begin{cases} a = \frac{1}{\lambda} \\ \lambda^2 = 2n + \lambda \end{cases}$$

$$\text{ssi} \quad \begin{cases} a = \frac{1}{\lambda} \\ \lambda \in \left\{ \frac{1 - \sqrt{1+8n}}{2}, \frac{1+\sqrt{1+8n}}{2} \right\} \end{cases}$$