Préparation du TP4 : Analyse de Fourier

Rappel de cours de Sup : Décomposition d'un signal périodique en série de Fourier

1. Rappel mathématique

Les deux expressions : $e(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$ et $e(t) = A\cos(\omega t - \Psi)$ (avec a, b, A et Ψ des constantes) sont équivalentes.

Démonstration :

→ Montrons que l'expression de droite implique l'expression de gauche est évident en développant le cosinus *:*

$$e(t) = A\cos(\omega t - \Psi) = A\cos(\omega t)\cos(\Psi) + A\sin(\omega t)\sin(\Psi) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$$

en posant $a = A\ \cos(\Psi)$ et $b = A\ \sin(\Psi)$

→ Montrons maintenant que l'expression de gauche implique celle de droite ; factorisons l'expression par $\sqrt{a^2+b^2}$

$$e(t) = \sqrt{(a^2+b^2)}\left(\frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}}\cos(\omega t) + \frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}\sin(\omega t)\right) \text{ or } \left(\frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}\right)^2 = 1.$$

On peut donc définir Ψ tel que $\cos(\Psi) = \frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$ et $\sin(\Psi) = \frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$. Posons également $A = \sqrt{a^2+b^2}$.

On a ainsi *:* $e(t) = A\cos(\omega t)\cos(\Psi) + A\sin(\omega t)\sin(\Psi) = A\cos(\omega t - \Psi)$

2. Développement en série de Fourier d'un signal périodique

Tout signal périodique $e(t)$, de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$, peut s'écrire comme la somme d'une composante continue a_0 et de fonctions sinusoïdales de pulsations $\omega, 2\omega, 3\omega, 4\omega$ ... :

$$e(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)$$

→ Expression de a_0 :

Comme la moyenne temporelle des cosinus et des sinus est nulle, on a de manière immédiate (**résultat à savoir**) :

$$a_0 = \langle e(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T e(t)dt$$

→ Expression des a_n et des b_n :

On peut montrer que (pas à connaitre, ils seront redonnés par l'énoncé):

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T e(t)\cos(n\omega t)dt \quad ; \quad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T e(t)\sin(n\omega t)dt$$

Remarque : d'après le paragraphe 1 on sait maintenant regrouper les cos et les sin de même fréquence. La décomposition en série de Fourier s'écrit :

$$e(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos(n\omega t - \Psi_k)$$

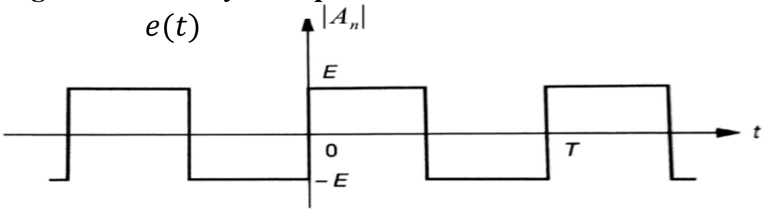
La composante correspondant à $\omega, 2\omega, 3\omega, 4\omega,$ ... est appelée **composante fondamentale**. Elle oscille à la même pulsation que le signal $e(t)$.

Les composantes correspondant à $2\omega, 3\omega, 4\omega,$ ... sont appelées les **harmoniques**.

3. Représentation spectrale

Pour se rendre compte de la contribution des différentes harmoniques et du fondamental dans la décomposition en série de Fourier, on trace sur un diagramme en bâtons la valeur de $|A_n|$ en fonction de $n\omega$. Ce diagramme est appelé **spectre de Fourier** de $e(t)$ (ou **représentation spectrale**).

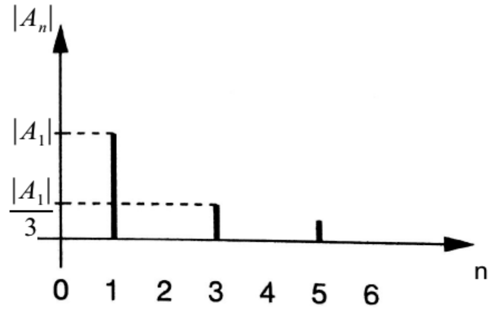
Exemple 1 : Spectre d'un signal créneau symétrique



La moyenne temporelle de ce signal créneau est nulle donc : $a_0 = A_0 = 0$
On obtient par calcul que :

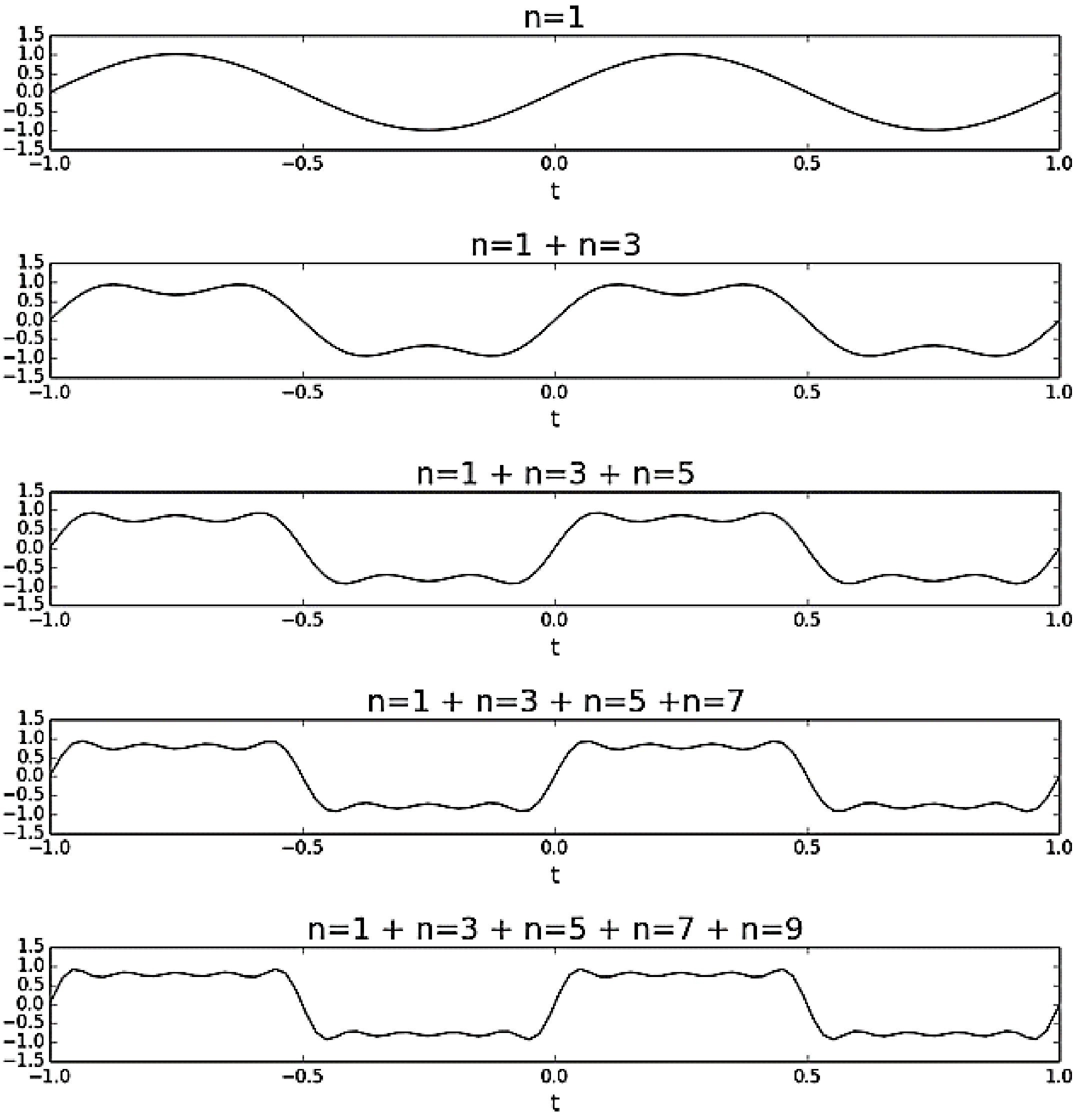
- si n est un entier pair : $A_n = 0$
- si n est un entier impair : $A_n = \frac{4E}{\pi n}$

Le spectre de ce signal créneau a donc l'allure suivante :



Cela signifie que l'on peut à l'inverse reconstruire le créneau en sommant des fonctions sinusoïdales de pulsations $\omega, 2\omega, 3\omega, 4\omega$, ... avec des amplitudes correspondant aux différents A_n.

On s'aperçoit que l'ajout d'harmoniques de plus en plus élevées permet des variations de la fonction de plus en plus brutales.



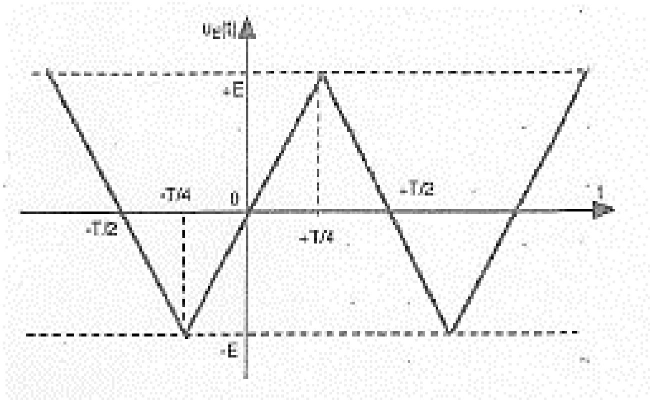
Exemple 2 : Spectre d'un signal triangulaire

La moyenne temporelle de ce signal triangulaire est nulle donc : $a_0 = A_0 = 0$

On obtient par calcul que :

- si n est pair : $A_n = 0$
- si n est impair ($n = 2p + 1$) :

$$A_{2p+1} = (-1)^p \frac{8E}{(2p+1)^2\pi^2}$$



Si l'on compare avec le créneau précédent qui avait des variations beaucoup plus brutales :

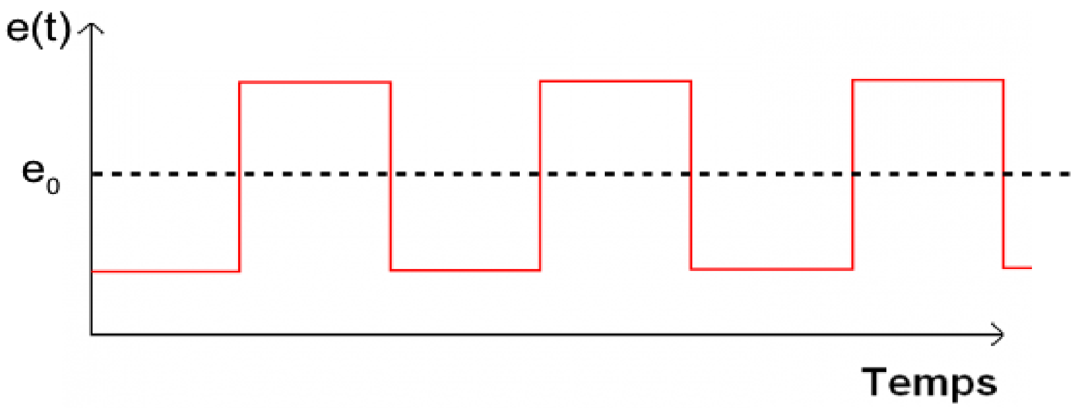
- pour le créneau : A_n varie en $1/n$
- pour le triangle : A_n varie en $1/n^2$

Les harmoniques élevées sont beaucoup plus atténuées pour le triangle que pour le créneau. C'est normal, le triangle variant de manière beaucoup plus « adoucie », il n'a pas besoin d'harmoniques élevées à la différence du créneau.

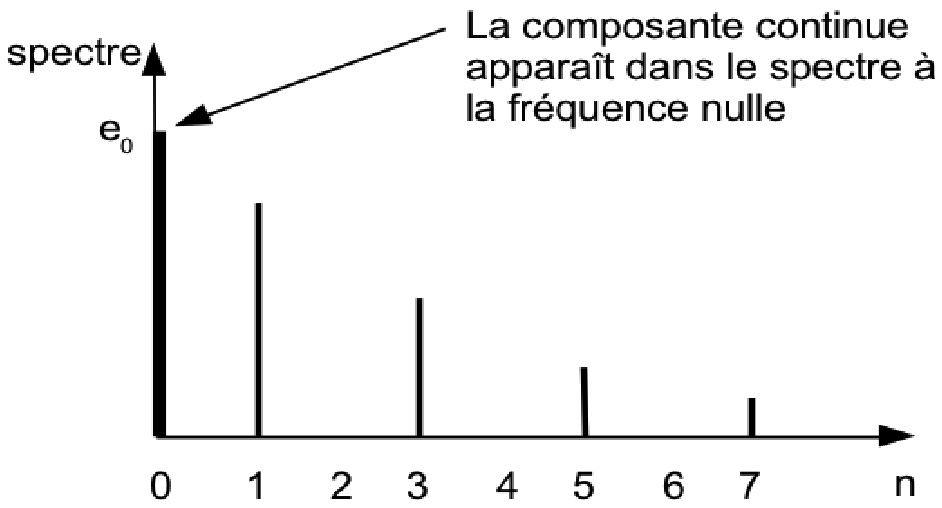
Plus une fonction périodique varie brutalement, plus les harmoniques élevées jouent un rôle important dans son développement en série de Fourier.

4. Présence d'une composante continue

Le signal $e(t)$ peut avoir une moyenne temporelle e_0 non nulle.



Cette composante continue apparait alors dans le spectre de Fourier :



5. Filtrage linéaire d'un signal périodique

Le filtre linéaire est caractérisé par sa fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = |\underline{H}(j\omega)|e^{j\varphi(j\omega)}$. Si l'on envoie dans ce filtre un signal sinusoïdal : $\underline{e} = \underline{E}e^{j\omega t}$ alors le signal de sortie du filtre sera :

$$\underline{s} = \underline{E}\ |\underline{H}(j\omega)|e^{j\varphi(j\omega)}e^{j\omega t}.$$

L'amplitude du signal de sortie est multipliée par $|\underline{H}(j\omega)|$ et ce signal de sortie subit un déphasage supplémentaire $\varphi(j\omega)$.
Considérons maintenant un signal $e(t)$ périodique mais plus nécessairement sinusoïdal.

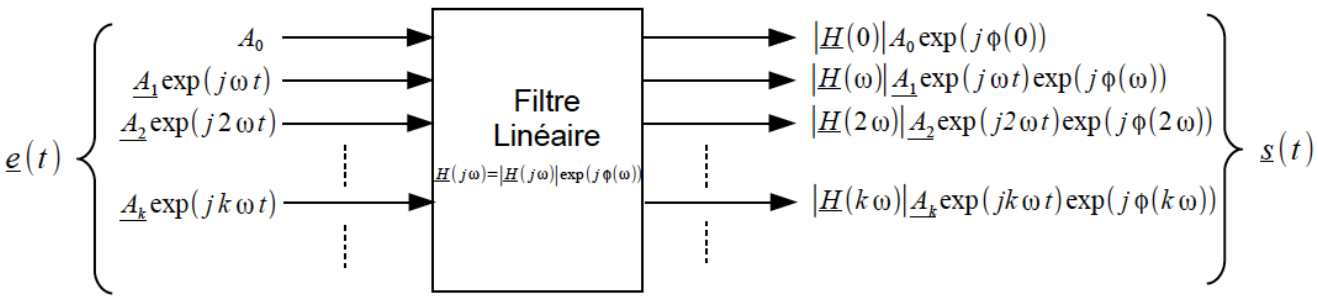
Lorsque le filtre est alimenté par un signal périodique non sinusoïdal de période T, la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$ fait subir à chaque composante spectrale périodique d'entrée de pulsation ω un déphasage $\varphi(\omega)$ qui est égal à l'argument de $\underline{H}(j\omega)$. De plus, l'amplitude de chaque composante spectrale est multipliée par le module $|\underline{H}(j\omega)|$ de la fonction de transfert.

Le développement de Fourier du signal d'entrée $e(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k\ \cos(k\omega t) + b_k\ \sin(k\omega t)$ peut être réécrit de la manière suivante en regroupant les termes en cosinus et en sinus :

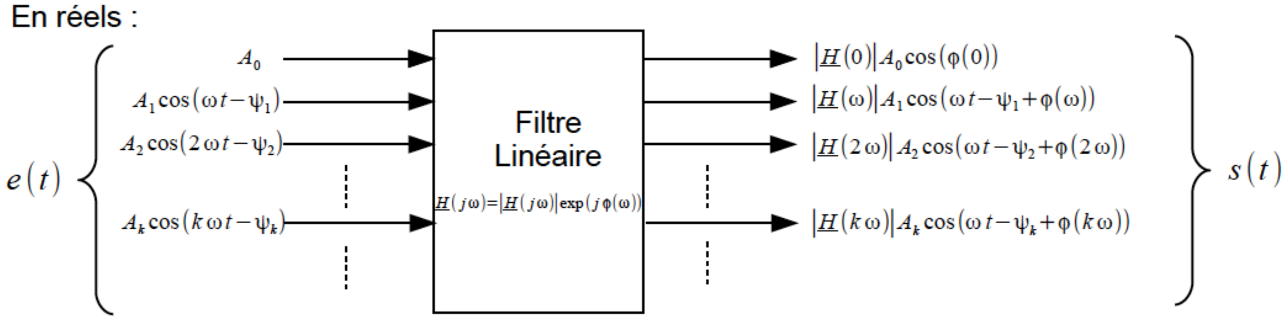
$$e(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} A_k\ \cos(k\omega t + \psi_k)\,,\ \ \text{avec}\ a_k = A_k \cos\psi_k\ \ \text{et}\ b_k = A_k \sin\psi_k$$

La grandeur complexe associée est : $\underline{e}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} A_k\ \exp\ j(k\omega t - \psi_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \underline{A}_k\ \exp\ j(k\omega t)$

En complexes :

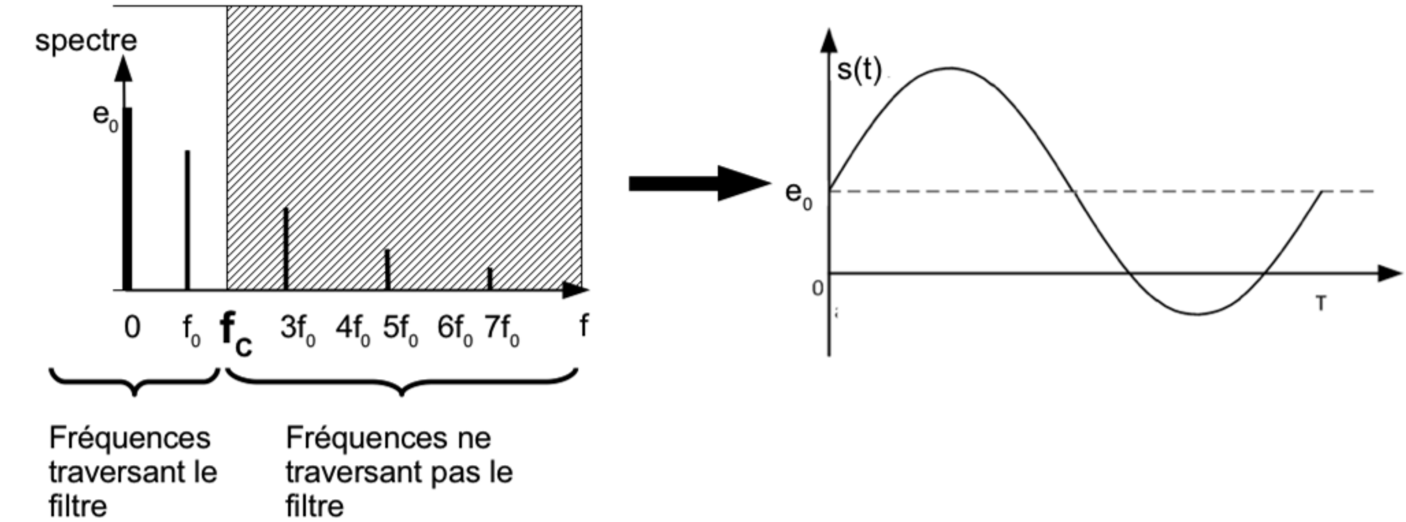


En réels :

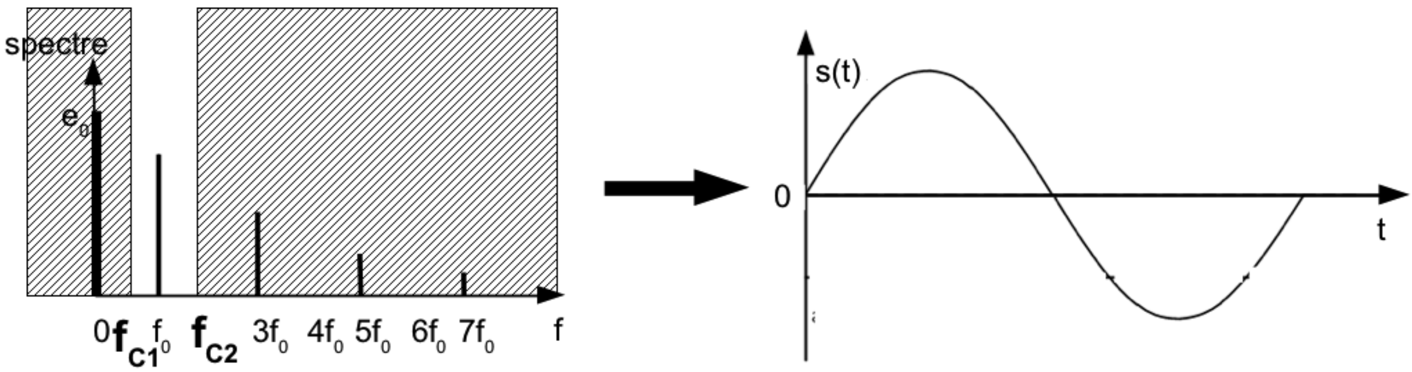


→ « En pratique, est-il nécessaire de faire tous ces calculs à chaque fois ? »
Si l'on veut effectuer une étude qualitative de l'action d'un filtre (suffisante dans bien des cas), bien sûr que non, une simple représentation du spectre de Fourier suffit.
Reprenons l'exemple du créneau décalé précédemment dont nous noterons la fondamentale f_0.

Si l'on veut transformer ce créneau en un signal sinusoïdal de fréquence f_0, on a intérêt à couper les fréquences supérieures à f_0. Pour cela on placera un filtre passe-bas dont la fréquence de coupure est située entre f_0 et $3f_0$.



Si l'on veut couper la composante continue tout en laissant passer la fréquence f_0, on peut alors utiliser un filtre passe-bande dont la fréquence centrale est en f_0 mais dont les fréquences de coupure sont situées entre 0 et f_0 pour la première, entre f_0 et $3f_0$ pour la deuxième.



Exercices

Exercice 1 :
On considère un filtre passe-haut du premier ordre dont la fréquence de coupure est 100 Hz. Donner l'allure du signal recueilli en sortie de filtre si on envoie en entrée :

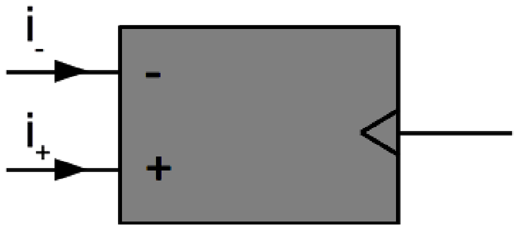
1. une sinusoïde d'amplitude 4V centrée autour de 1V et de fréquence 2 kHz.
2. une sinusoïde d'amplitude 4V centrée autour de 0V et de fréquence 2 kHz.
3. un triangle d'amplitude 4V centré autour de 1V et de fréquence 2 kHz.
4. un triangle d'amplitude 4V centré autour de 0V et de fréquence 2 kHz.

Exercice 2 :
Mêmes questions avec un filtre passe-bas du premier ordre dont la fréquence de coupure est 100 Hz.
On rajoute les deux cas suivants :

5. un créneau d'amplitude 4V centré autour de 1V et de fréquence 75 Hz.
6. un créneau d'amplitude 4V centré autour de 0V et de fréquence 75 Hz.

***Exercice 3* :**

Un amplificateur linéaire intégré (ALI) est un composant électronique présentant 2 bornes d'entrée (bornes notées + et -) et une sortie.
L'ALI est alimenté par une source extérieure +15V/-15V. Sa représentation schématique est la suivante (l'alimentation +15V/-15V n'est pas représentée) :
La sortie est figurée par le triangle de droite.

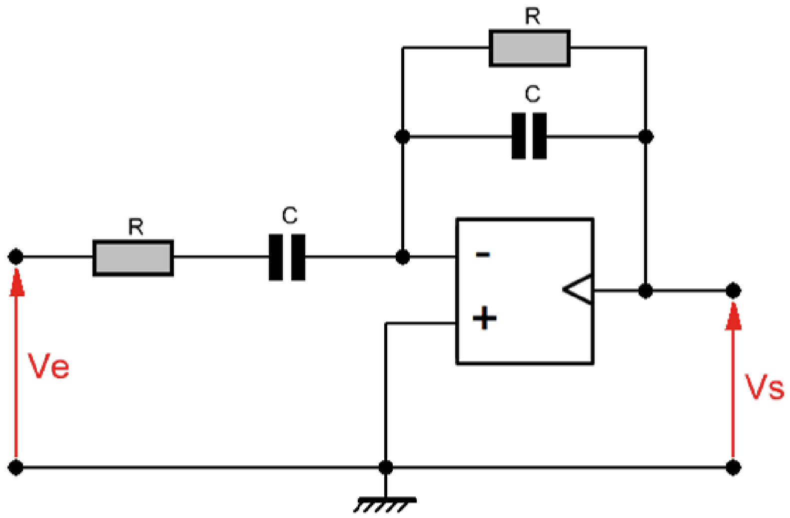


Les caractéristiques d'un ALI idéal fonctionnant en régime linéaire sont les suivantes :

- l'impédance de l'ALI vue depuis le circuit situé en amont est infinie : autrement dit $i_- = i_+ = 0$
- la différence de potentiels entre les deux bornes d'entrée $V_+ - V_-$ est nulle.

On considère le filtre suivant utilisant un ALI idéal fonctionnant en régime linéaire, alimenté par une tension V_e sinusoïdale de pulsation ω.

1. Déterminer sans calculs la nature de ce filtre.



2. Notons $\underline{i}$ l'intensité complexe traversant la résistance et le condensateur de gauche sur le schéma. Exprimer cette intensité en fonction de $\underline{V_e}$, R, C et ω.

3. De même, exprimer cette intensité en fonction de $\underline{V_s}$, R, C et ω.

4. En déduire la fonction de transfert de ce filtre en fonction de R, C et ω.

5. Montrer que cette fonction de transfert peut se mettre de la forme :
$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$
avec $\omega_0 = \frac{1}{RC}$. H_0 et Q sont deux constantes que l'on exprimera. Que représentent ω_0 , H_0 et Q physiquement ?