Exo 21

[Soit $z \neq 0$,

$$\frac{|2^{n+1}(n+1) z^{2(n+1)+1}|}{|2^n n z^{2n+1}|} = 2\left(1+\frac{1}{n}\right)|z|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2|z|^2.$$

On déduit de la règle de d'Alembert que si

$2|z|^2 < 1$ alors $\sum 2^n n z^{2n+1}$ converge absolument

et si $2|z|^2 > 1$ ——————————— diverge grossièrement.

On en déduit que le rayon de convergence de $\sum 2^n n z^{2n+1}$ vaut $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Toujours en prenant $z \neq 0$,

$$\frac{|(n+1)!\, z^{(n+1)^2}|}{|n!\, z^{n^2}|} = (n+1)|z|^{2n+1}$$

* Si $|z| \geqslant 1$, $(n+1)|z|^{2n+1} \longrightarrow +\infty$ et bien

sûr $\sum n!\, z^{n^2}$ diverge alors grossièrement.

* Si $|z| < 1$, $(n+1)|z|^{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées.

et donc $\sum n!\, z^{n^2}$ converge alors absolument.

Ainsi le rayon de convergence de $\sum n!\, z^{n^2}$ vaut 1.]

P.10 Si $a_n = O(b_n)$ alors $R_a \geqslant R_b$.

[On suppose $a_n = O(b_n)$,

et soit $\rho \geqslant 0$ tq $(b_n \rho^n)$ soit bornée

alors $(a_n \rho^n) = \left(\frac{a_n}{b_n} \cdot b_n \rho^n\right)$ est encore bornée.

$\{\rho \geqslant 0 \mid (b_n \rho^n) \text{ est bornée}\} \subset \{\rho \geqslant 0 \mid (a_n \rho^n) \text{ est bornée}\}$

donc R_a majore $\{\rho \geqslant 0 \mid (b_n \rho^n) \text{ est bornée}\}$

et comme R_b en est le plus petit majorant,

alors $R_b \leqslant R_a$.

Si maintenant $|a_n| \sim |b_n|$ alors $a_n = O(b_n)$ et $b_n = O(a_n)$

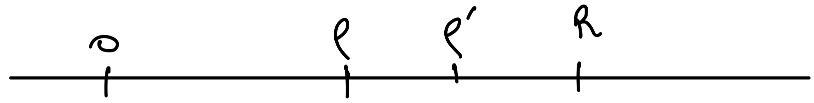
et ainsi $R_a \geq R_b$ et $R_b \geq R_a$.

et donc $R_a = R_b$.]

<u>P.III</u> [Notons R et R' les rayons de convergence respectifs de $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$.

Comme $a_n = O(n a_n)$ alors $R \geq R'$. (1)

Soit $(0 \leq)\ \rho < R$, et posons $\rho' = \frac{1}{2}(\rho + R)$



alors $\sum a_n \rho'^n$ converge (absolument) et donc $(a_n \rho'^n)$ converge vers 0.

Puis $n a_n \rho^n = a_n \times \underbrace{n\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^n}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} \rho'^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Ainsi $[0, R[\subset \{\rho \geq 0 \mid (n a_n \rho^n) \text{ est bornée}\}$

donc R' (borne supérieure de $\{\rho \geq 0 \mid (n a_n \rho^n) \text{ est bornée}\}$) majore $[0, R[$ et ainsi $R' \geq R$. (2)

On a donc bien $R = R'$.]

<u>Exo 3</u> [On note encore R et R' les rayons de convergence respectifs de $\sum a_n z^n$ et $\sum n^\alpha a_n z^n$.

On va montrer que $R \leq R'$:

Supposons $\rho \in [0, R[$ et $\rho' = \frac{1}{2}(\rho + R)$ alors $(a_n \rho'^n)$ converge vers 0 (puisque $\sum a_n \rho'^n$ CVA)

puis $n^\alpha a_n \rho^n = n^\alpha a_n \left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^n \rho'^n = \underbrace{a_n \rho'^n}_{\to 0} \times \underbrace{n^\alpha \left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^n}_{\to 0} \longrightarrow 0$

et ainsi R' majore encore $[0, R[$.

et donc $R' \geq R$.

Comme $a_n z^n = n^{-\alpha}(n^\alpha a_n z^n)$ alors de même $R \geq R'$.]

<u>Rappel</u> : Étant données deux séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ de $\mathbb{K}$

et en posant $\forall n,\ c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

alors si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent absolut alors $\sum c_n$ converge égalt absolut et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right).$$

P.14 | [Supposons $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayons de convergence respectifs R_a et R_b et soit z tq $|z| < \min(R_a, R_b)$.

mais alors, pour cette valeur de z,

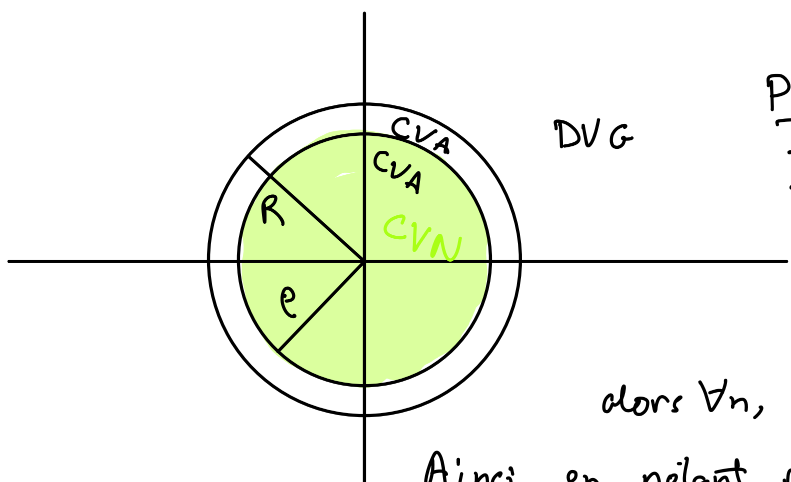
$\sum a_n z^n$ converge absolument et $\sum b_n z^n$ aussi

donc $\sum (a_n+b_n) z^n$ est encore absolut convergente et ainsi le rayon de convergence de la série entière $\sum (a_n+b_n)z^n$ vaut au moins $\min(R_a, R_b)$.

De plus, en ayant noté $\forall n,\ c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, et en prenant z tq $|z| < \min(R_a, R_b)$,

$\sum c_n z^n$ est le produit de Cauchy des séries numériques $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ qui convergent absolut donc $\sum c_n z^n$ aussi.

Ainsi le rayon de convergence de $\sum c_n z^n$ vaut au moins $\min(R_a, R_b)$.].



P.15 | [$\rho \in]0, R[$ et donc $\sum a_n \rho^n$ est absolut convergente.

Soit alors $z \in \mathbb{K}$ tq $|z| \leqslant \rho$,

alors $\forall n,\ |a_n z^n| \leqslant |a_n \rho^n|$

Ainsi, en notant pour tout n,

f_n la fonction $z \mapsto a_n z^n$, f_n est donc bornée sur $B^F(0,\rho)$ et $\|f_n\|_\infty^{B^F(0,\rho)} \leqslant |a_n \rho^n|$

or $\sum |a_n \rho^n|$ converge ce qui montre donc que $\sum f_n$ converge normalement sur $B^F(0,\rho] = \{z \in \mathbb{K} \mid |z| \leq \rho\}$.]]

C.16| [[en notant encore f_n la fonction $z \in \mathbb{R} \mapsto a_n z^n$, alors $\forall n$, f_n est continue,

$$\forall \rho \in]0,R[, \quad \sum f_n \text{ converge normalement vers } f \text{ sur } [-\rho,\rho]$$

Mais alors f est continue sur $]-R,R[\ \left(= \bigcup_{\rho \in]0,R[} [-\rho,\rho]\right)$.]]

L.18| [[se déduit immédiatement des propositions 7 et 11.]]

P.19| [[On note toujours $f_n : z \in \mathbb{R} \mapsto a_n z^n$, et on note que $\forall n$, f_n est de classe C^1.

Soit $\rho \in]0,R[$, alors

$\sum f_n$ converge simplement vers f sur $[-\rho,\rho]$

$\sum f'_n$ converge normalement sur $[-\rho,\rho]$

mais alors f est de classe C^1 sur $[-\rho,\rho]$ puis sur $]-R,R[= \bigcup_{\rho \in]0,R[} [-\rho,\rho]$ de dérivée la somme de $\sum f'_n$

c-à-d $$z \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1} = z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} z^n. \ ]]$$

Cor.20| [[On peut faire une récurrence, ou bien on procède comme à la question précédente en notant que $\forall n$, f_n est de classe C^p sur $]-R,R[$

$\sum f_n$ converge simplement vers f sur $[-\rho,\rho]$ (où $\rho \in]0,R[$)

$\sum f'_n, \ldots, \sum f_n^{(p)}$ convergent normalement sur $[-\rho,\rho]$.

et ainsi f est de classe C^p sur $]-R,R[$, et ce pour tout p.]].

P.21| [[$\sum a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ ont le m̄ rayon de convergence R.

f est la somme de la première sur $]-R,R[$,

on note g la somme de la seconde sur $]-R,R[$.

Alors $g(0) = 0$, de plus d'après la proposition 19, g est de classe C^1 et $\forall x \in]-R,R[$, $g'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = f(x)$]]

P.22) [On sait f de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et ,

étant donné $p\in\mathbb{N}$, et $z\in]-R,R[$,

$$f^{(p)}(z) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\times\cdots(n-p+1)a_n z^{n-p}$$

$n a_n z^{n-1}$

$n(n-1)a_n z^{n-2}$

$n(n-1)(n-2)a_n z^{n-3}$

$(a+b)^n$

et ainsi: $f^{(p)}(0) = p(p-1)\cdots(1)\,a_p.\,0^0$

$$= p!\,a_p.$$

et on a donc bien $\boxed{a_p = \dfrac{f^{(p)}(0)}{p!}}$]

P.24) [cf P.14]

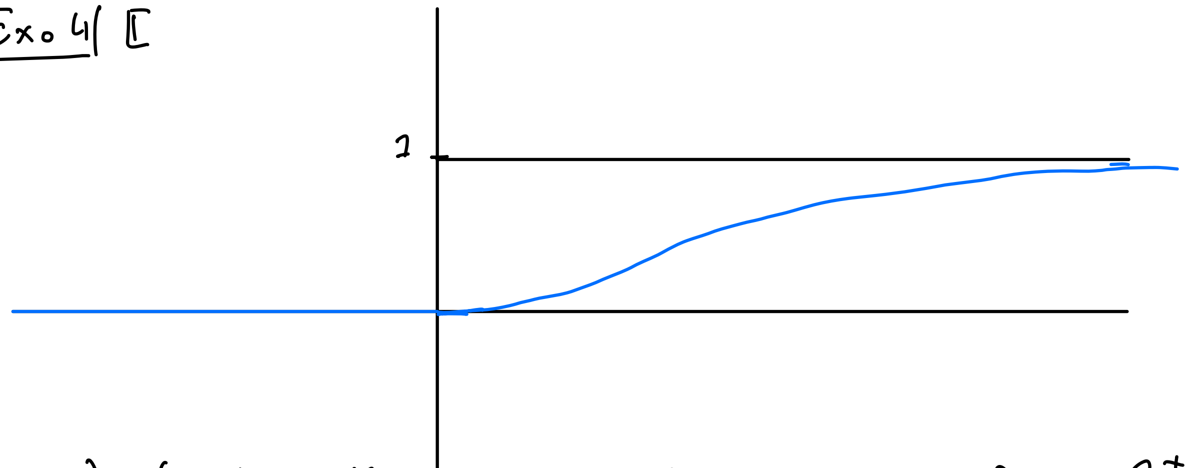
Th.26) [Si f est la somme de $\sum a_n z^n$ sur $]-r,r[$

et que le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ vaut au moins r

alors on sait déjà que f est de classe C^∞ et que

$\forall p,\ a_p = \dfrac{f^{(p)}(0)}{p!}$ ...]

Exo 4) [



a) D'après les th. généraux, f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

On montre par récurrence que $\forall n$, il existe P_n polynomiale tq

$\forall x>0,\ f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{2n}}\exp\left(-\dfrac{1}{x}\right)$.