

$$\sum a_n z^n$$

Règle de d'Alembert :

Exemple : (1.1 de la feuille de TD)

Rayon de $\sum \frac{n^2+1}{3^n} z^n$?

$$\frac{\frac{(n+1)^2+1}{3^{n+1}}}{\frac{n^2+1}{3^n}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{n^2+2n+3}{n^2+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3}$$

donc en vertu de la règle de d'Alembert, le rayon de convergence de $\sum \frac{n^2+1}{3^n} z^n$ vaut 3.

Exercice (1.3 de la feuille de TD) Rayon de $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{n^2} z^{2n}$.

on applique ici la règle de d'Alembert appliquée aux séries numériques :

soit $z \neq 0$ et $n > 1$, alors

$$\frac{\left| \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2} z^{2n+2} \right|}{\left| \frac{\ln n}{n^2} z^{2n} \right|} = \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \times \frac{n^2}{(n+1)^2} |z|^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |z|^2.$$

Ainsi, si $|z| < 1$ alors $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{n^2} z^{2n}$ converge absolument

et, si $|z| > 1$, alors $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{n^2} z^{2n}$ diverge grossièrement.

Ainsi le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{n^2} z^{2n} \text{ vaut } 1.$$

[4a) Déjà $\forall n > 0$, $f^{(0)}(x) = f(x) = \exp(-\frac{1}{x}) = \frac{1}{x^{2 \times 0}} \exp(-\frac{1}{x})$
et $P_0(x) = 1$ convient,

Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose qu'il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tq

$$\forall n > 0, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} \exp(-\frac{1}{x}).$$

Mais alors, $\forall n > 0$, $f^{(n+1)}(x) = \left(\frac{P'_n(x)}{x^{2n}} - \frac{2nP_n(x)}{x^{2n+1}} + \frac{1}{x^2} \cdot \frac{P_n(x)}{x^{2n}} \right) \exp(-\frac{1}{x})$

$$= \frac{x^2 P'_n(x) + (1-2nx) P_n(x)}{n^{2n+2}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{n}\right)$$

ainsi en posant $P_{n+1}(x) = x^2 P'_n(x) + (1-2nx) P_n(x)$

alors $P_{n+1} \in \mathbb{R}[X]$

et on a bien $\forall n > 0, f^{(n+1)}(x) = \frac{P_{n+1}(x)}{n^{2(n+1)}} \exp\left(-\frac{1}{n}\right)$

ce qui achève la récurrence.

b) Les restrictions de f à $\mathbb{R}^{-*}$ et $\mathbb{R}^{+*}$ sont bien sûr de classe C^∞ .

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 = f(0) \quad \text{et} \quad f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 = f'(0)$$

De plus, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

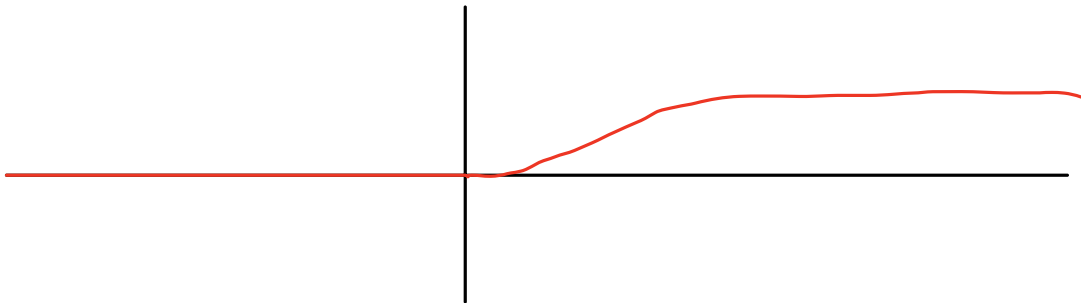
$$f^{(n)}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

$$\text{et si } x > 0, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{n^{2n}} \exp\left(-\frac{1}{n}\right)$$

$$\xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \text{ par croissances comparées.}$$

Mais alors f est bien de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall n > 0, f^{(n)}(0) = 0$$



c) Si f était développable en série entière au voisinage de 0, cela-ci serait $x \mapsto \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = x \mapsto 0$

autrement dit on aurait $\forall x \in]-\eta, \eta[, f(x) = 0$

ce qui est impossible car $\forall x > 0, f(x) > 0$.

Donc f n'est PAS développable en série entière au voisinage de 0. $\square$

P.29) [Soit $n \in \mathbb{N}$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ de classe C^{n+1} .

Posons $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$

$$x \mapsto f(x) + (b-x)f'(x) + \dots + \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n)}(x)$$

Alors φ est d'après les théorèmes généraux de classe C^1 .

$$\text{or, } \forall x \in [a, b], \quad \varphi'(x) = \cancel{f'(x)} - \cancel{f'(x)} + (b-x)\cancel{f''(x)} - (b-x)\cancel{f''(x)} \\ + \frac{(b-x)^2}{2}\cancel{f^{(3)}(x)} + \dots - \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}\cancel{f^{(n)}(x)} + \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)$$

Mais alors, φ étant de classe C^1 ,

$$\int_a^b \varphi'(t) dt = \varphi(b) - \varphi(a)$$

En d'autres termes :

$$f(b) - \left[f(a) + (b-a)f'(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) \right] = \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

C.30) [Supposons ici $a < b$:

$$\text{alors } \left| f(b) - \left[f(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) \right] \right| = \left| \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \right|$$

$$\leq \int_a^b \left| \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \right| dt$$

$$\leq \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} |f^{(n+1)}(t)| dt$$

$$\leq M \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} dt$$

$$\leq M \left[-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_a^b$$

$$\leq M \cdot \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Si maintenant $a > b$, on prouve de même que

$$\left| f(b) - \left[\dots \right] \right| \leq M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \quad]$$

P.31) [On sait que, étant donné $z \in \mathbb{C}$, $\sum z^n$ converge

ssi $|z| < 1$ et, si tel est le cas :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

(en effet, si $z \neq 1$,
premier

(divergence grossière

si $|z| \geq 1$

$$\sum_{k=0}^n z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \quad \text{dernier \times raison}$$

raison

)]

Exo 5 | [Si $a \neq 0$ et si $|z| < |a|$ alors

$$\frac{1}{a-z} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{a}} = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{a^{n+1}} \cdot z^n \quad]$$

Exo 6 | [En posant $f:]-1,1[\rightarrow \mathbb{R}$

$$n \mapsto \frac{1}{1-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} n^n.$$

f est alors de classe C^∞ et, étant donné $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \forall n \in]-1,1[, \quad f^{(p-1)}(n) &= 1 \times 2 \times \dots \times (p-1) \times \frac{1}{(1-n)^p} \\ &= \frac{(p-1)!}{(1-n)^p}. \end{aligned}$$

et, par ailleurs (d'après le cor. 20)

$$\forall n \in]-1,1[, \quad f^{(p-1)}(n) = \sum_{n \geq p-1} \underbrace{n(n-1) \dots (n-p+2)}_{\frac{n!}{(n-(p-1))!}} z^{n-p+1}$$

$$\text{et ainsi: } \frac{1}{(1-n)^p} = \frac{1}{(p-1)!} \sum_{n \geq p-1} n(n-1) \dots (n-p+2) z^{n-p+1}$$

$$= \sum_{n \geq p-1} \binom{n}{p-1} z^{n-(p-1)} \quad \downarrow n \leftarrow n+p-1$$

$$= \sum_{n \geq 0} \binom{n+p-1}{p-1} z^n = \binom{n+p-1}{n} \quad]$$

Exo 7 | [Soit $a \neq 0$ et $|x| < |a|$

$$\begin{aligned} \text{alors } \frac{1}{(a-x)^p} &= \frac{1}{a^p} \cdot \frac{1}{(1-\frac{x}{a})^p} \\ &= \frac{1}{a^p} \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p-1}{n} \left(\frac{x}{a}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p-1}{n} \frac{1}{a^{n+p}} \cdot x^n. \quad] \end{aligned}$$

Exo 8 | $f: x \mapsto \frac{2x+3}{(x-2)(x-3)^2}$ est développable en série entière

sur $] -2, 2[$ car le produit de :

$x \mapsto 2x+3$ développable sur $\mathbb{R}$

$x \mapsto \frac{1}{x-2}$ développable sur $]2,2[$

$x \mapsto \frac{1}{(x-3)^2}$ ————— $]3,3[$

donc f est développable en série entière sur $]2,2[$. $\square$

P.32 $\square$ On pose $f: x \in]-1,1[\mapsto \ln(1+x)$.

Alors f' est développable en série entière sur $] -1,1[$ car
 $\forall x \in]-1,1[, f'(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n$

Mais alors f est à son tour développable en série
entière sur $] -1,1[$ et

$$\forall x \in]-1,1[, f(x) = f(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \quad (\text{cf. p 21})$$

ainsi $\forall x \in]-1,1[,$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n.$$

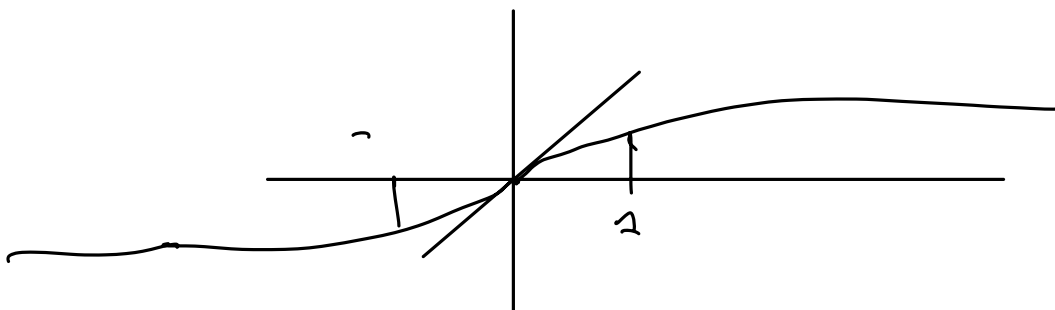
$\square$

P.33 $\square$ Ici encore on a

$$\begin{aligned} \forall x \in]-1,1[, \operatorname{arctan}'(x) &= \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}. \end{aligned}$$

Mais alors arctan est à son tour développable en
série entière au voisinage de 0 et on

$$\begin{aligned} \forall x \in]-1,1[, \operatorname{arctan}(x) &= \underbrace{\operatorname{arctan}(0)}_{=0} + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}. \quad \square \end{aligned}$$



Exercice 1 | 2, 4, 6, 9 (Séries entières)

Exercice 3

$$1.2) \frac{e^{-(n+1)^2}}{e^{-n^2}} = e^{-2n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

donc, d'après la règle de d'Alembert, le rayon de convergence de $\sum e^{-n^2} z^n$ vaut $+\infty$.

1.4) Soit $z \neq 0$,

$$\begin{aligned} \frac{\left| \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} z^{n+1} \right|}{\left| \frac{n^n}{n!} z^n \right|} &= \left(\frac{n+1}{n} \right)^n |z|^3 = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n |z|^3 \\ &= \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) |z|^3 \\ &= \exp\left(n \left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) |z|^3 \rightarrow e |z|^3 \end{aligned}$$

Mais alors, si $|z| < \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$ alors $e |z|^3 < 1$ et donc $\sum \frac{n^n}{n!} z^{3n}$ converge absolument

et, si $|z| > \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$, $e |z|^3 > 1$ et $\sum \frac{n^n}{n!} z^{3n}$ diverge grossièrement

Le rayon de convergence vaut donc $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$.

$$\underline{\sum \binom{2n}{n} z^n}$$

$$\begin{aligned} \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} &= \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \times \frac{(n!)^2}{((n+1)!)^2} \\ &= \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \frac{2(2n+1)}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 4 \end{aligned}$$

donc le rayon de convergence vaut $\frac{1}{4}$.

$$9. \sum z^{n^2}$$

$$\text{Soit } z \neq 0, \quad \frac{|z^{(n+1)^2}|}{|z^{n^2}|} = |z|^{2n+1}$$

Donc, si $|z| < 1$ alors $|z|^{2n+1} \rightarrow 0$ et donc $\sum z^{n^2}$ converge.

et, si $|z| > 1$, $|z|^{2n+1} \rightarrow +\infty$ et $\sum z^{n^2}$ diverge grossièrement.

(donc le rayon de convergence vaut $\underline{1}$)

Autre méthode : Soit $\rho \geq 0$, (ρ^{n^2}) est bornée si et seulement si $\rho \leq 1$ donc le rayon de convergence vaut $\underline{1}$.

Autre méthode : on rappelle qu si (a_n) est bornée alors le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ vaut au moins $\underline{1}$.

On a donc ici un rayon au moins égal à $\underline{1}$ mais de plus $\sum 1^{n^2}$ diverge donc le rayon de convergence vaut $\underline{1}$.

Exo 9 $\forall x \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[, h(x) = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$.

$$1. \quad \forall x \neq 0, \quad h(x) = \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - x}{x^2} = -\frac{1}{2} + \frac{x}{3} + o(x)_{x \rightarrow 0}$$
$$\xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2}$$

Ainsi, on prolonge h par continuité en 0 en posant $h(0) = -\frac{1}{2}$.

Mais alors h admet en 0 un DL d'ordre $\underline{1}$

et h est donc dérivable en 0 et $h'(0) = \underline{\frac{1}{3}}$.

3 Oui!

$$\forall x \in]-1, 1[\setminus \{0\} \quad h(x) = \frac{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n - x}{x^2}$$
$$= \frac{\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n}{x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+2} x^n$$

l'égale est aussi valable pour $x = 0$ car $h(0) = -\frac{1}{2}$.
donc h est DSE au voisinage de 0 .

Ainsi h est de classe C^∞ sur $] -1, 1[$

(et donc aussi sur $] -1, +\infty[$ puisqu'elle l'est
de toute évidence sur $] 0, +\infty[$.) $\square$