P34 | C

Soit $z\in\mathbb{C}$, Posons $\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$

$t \longmapsto \exp(tz)$.

φ est d'après les thm généraux de classe C^∞ et

$\forall t\in[0,1],\ \forall n\in\mathbb{N},\ \varphi^{(n)}(t) = z^n \exp(tz)$.

On a $\forall t\in[0,1],\ |\varphi^{(n)}(t)| = |z|^n \exp(t\,\mathrm{Re}(z))$

$\leqslant |z|^n \max(1, \exp(\mathrm{Re}(z)))$

$\leqslant |z|^n \max(1, |e^z|)$

et donc encore $\forall t,\ |\varphi^{(n+1)}(t)| \leqslant |z|^{n+1} \max(1, |e^z|)$

D'où, par une inégalité de Taylor, étant donné $n\in\mathbb{N}$,

$$\left|\varphi(1) - \left(\varphi(0) + \varphi'(0) + \cdots + \frac{(1-0)^n}{n!}\varphi^{(n)}(0)\right)\right| \leqslant \frac{|1-0|^{n+1}}{(n+1)!} |z|^{n+1} \max(1, |e^z|)$$

c-à-d :

$$\left|\exp(z) - \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!}\right)\right| \leqslant \underbrace{\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \max(1, |e^z|)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

ce qui montre que la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge et a pour somme $\exp(z)$.

Ainsi exp est développable en série entière sur $\mathbb{C}$

et $\forall z,\ \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.]

P.35 | [$\forall x\in\mathbb{R}$, $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

$$= \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ix)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-ix)^n}{n!}}{2i}$$

$$= 2\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(ix)^{2p+1}}{2i\,(2p+1)!} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p x^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

Calculs analogues pour $\cos x$, $\mathrm{ch}\, x$, $\mathrm{sh}\, x$.]

<u>Exercice</u> : Montrer que $f : x\neq 0 \longmapsto \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ est développable en

$0 \longmapsto \frac{1}{2}$

série entière sur $\mathbb{R}$.

[Soit $x \neq 0$,

$$f(x) = \frac{1 - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}}{x^2} = \frac{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{(2n)!}}{x^2}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2(n-1)}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\boxed{(-1)^n} x^{2n}}{\boxed{(2n+2)!}} \rightarrow \frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!}$$

Sachant $f(0) = \frac{1}{2}$ alors cette égalité est également valable pour $x = 0$ ce qui montre que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

Question supplémentaire : calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0)$

* Si n est impair, $f^{(n)}(0) = 0$ (f est paire)
* Si n est pair, en notant $p \in \mathbb{N}$ tq $n = 2p$,

$$f^{(n)}(0) = \frac{(-1)^p}{(2p+2)!}(2p)! = \frac{(-1)^p}{(2p+1)(2p+2)} .$$]

$$(1+x)^\alpha \neq 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots \rightarrow \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

<u>Exo 91</u> [une primitive de $x \mapsto x$ est $x \mapsto \frac{x^2}{2}$

$$y' = a(x) y$$

$$(\exp \circ F)' = F' \times \exp \circ F$$

ainsi l'ensemble des solutions de $y' = xy$

est $\left\{ x \mapsto \lambda \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

Celle de condition initiale $y(0) = 1$ est $x \mapsto \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)$.

Cherchons une fonction développable en série entière solution de cette équation :

Supposons que $\forall x \in]-R, R[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

alors f est solution de $y' = xy$ ssi

$$\forall x \in]-R,R[, \quad \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}}_{f'(x)} = \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1}}_{x f(x)}$$

ssi (par unicité d'un DSE)

$$a_1 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = (n+2)a_{n+2}$$

$$(\text{ou encore } \forall n \geq 2, \; na_n = a_{n-2}.$$

En cherchant la solution de condition initiale $y(0) = 1$ on impose donc $a_0 = 1$ et, si f convient, on a donc :

$$\forall p, \quad a_{2p+1} = 0$$

$$a_{2p} = \frac{1}{2p} a_{2p-2} = \frac{1}{2p(2p-2)} a_{2p-4} = \cdots$$

$$= \frac{1}{2p(2p-2)\times\cdots 4\times 2} a_0 = \frac{1}{2^p p!}.$$

Donc si f convient, on a $\forall x \in]-R,R[$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!},$$

Synthèse : Le rayon de convergence de $\sum \frac{x^{2n}}{2^n n!}$ vaut $+\infty$ (se déduit de la règle de d'Alembert)

et la somme de $\sum \frac{x^{2n}}{2^n n!}$ est alors, par les calculs précédents, solution de $y' = xy$ de condition initiale $y(0) = 1$.

De l'unicité d'une telle solution, on déduit donc que $x \mapsto \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)$ est développable en série entière de développement

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!}. \quad]$$

P.37] [Posons $f = x \mapsto (1+x)^\alpha$,

alors f est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et

$$\forall x, \quad f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$$

$$= \frac{\alpha f(x)}{1+x}.$$

Supposons que $\forall x \in]-R,R[$, $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

g est alors solution de $y' = \frac{\alpha}{1+x} y$ sur $]\max(-R,-1), R[= I$

ssi $\forall x \in I, \quad (1+x) \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

ssi (par l'unicité d'un DSE)

$$\begin{cases} a_1 = \alpha a_0 \\ \text{et } \forall n \geq 1,\ n a_n + (n+1) a_{n+1} = \alpha a_n \end{cases}$$

ssi $a_1 = \alpha a_0$

et $\forall n \geq 1$, $a_{n+1} = \dfrac{\alpha - n}{n+1} a_n$

g est alors de plus de condition initiale $g(0) = 1$ ssi $a_0 = 1$.

et si g convient alors on a :

$a_0 = 1$

$$\forall n \geq 1,\ a_n = \frac{\alpha-(n-1)}{n} a_{n-1} = \frac{(\alpha-(n-1))(\alpha-(n-2))}{n(n-1)} a_{n-2}$$

$$= \frac{(\alpha-(n-1))(\alpha-(n-2))\cdots(\alpha-1)\alpha}{n(n-1)\cdots\times 2\times 1} a_0$$

$$= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!}.$$

et donc $\forall x \in I$, $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!} x^n$.

On observe alors que le rayon de convergence de

$$\sum \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!} x^n \text{ vaut } 1 \text{ (d'Alembert)}$$

Mais alors $x \mapsto (1+x)^\alpha$ qui est aussi la solution de

$y' = \dfrac{\alpha}{1+x} y$ de condition initiale $y(0) = 1$

vaut donc, de par l'unicité d'une telle solution

la somme de $x \mapsto \displaystyle\sum \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!} x^n$ sur $]-1,1[$. ∎