$(E) \quad y' + a(t)y = b(t)$

$(E_H) \quad y' = -a(t)\, y$

<u>P.1</u> [Soit $f : I \to \mathbb{K}$ dérivable,

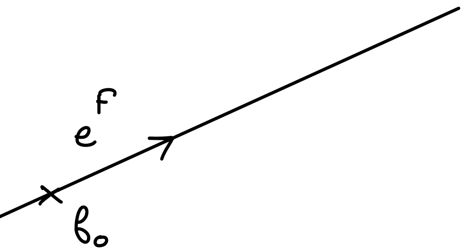
on pose $g = f \times e^{-F}$.

alors $\forall t \in I, \quad g'(t) = \left[f'(t) + a(t)\, f(t) \right] e^{-F(t)}$

Ainsi f est solution de (E_H) ssi g est constante

ssi il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tq $\forall t \in I, \ f(t) = \lambda e^{F(t)}$.]

$t \mapsto \lambda e^{F(t)} \in$ solutions de (E_H)



$t \mapsto \lambda(t) e^{F(t)}$

$\downarrow$

ceci est solution de (E) ssi :

$$\forall t, \quad \lambda'(t) e^{F(t)} + \underbrace{\lambda(t)(-a(t))\, e^{F(t)} + a(t)\, \lambda(t) e^{F(t)}}_{=0} = b(t)$$

ssi $\forall t, \ \lambda'(t) = b(t)\, e^{-F(t)}$

<u>Exemple 4</u> Sur $\mathbb{R}^{+*}$: $(E) \ y' + \frac{1}{t} y = \frac{\cos t}{t}$

$(E_H) \quad y' = -\frac{1}{t} y$

$\int^t -\frac{1}{x}\, dx = -\ln t$

et $S_H = \left\{ t \mapsto \frac{\lambda}{t} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

On cherche une solution de (E) sous la forme $t \mapsto \frac{\lambda(t)}{t}$ où $\lambda : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ est dérivable.

λ convient ssi $\forall t > 0, \ \frac{\lambda'(t)}{t} = \frac{\cos t}{t}$

ssi $\forall t, \ \lambda'(t) = \cos t$.

Ainsi $\lambda = \sin$ convient et donc $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ est solution de E.

L'ensemble des solutions de E est donc
$\{t \mapsto \frac{\lambda + \sin t}{t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

$(E)\ AX = Y$ $\qquad A = M_{n,p}(\mathbb{K})$

$AX_0 = Y$

$X \in M_{p,1}(\mathbb{K})$ est solution de (E) ssi

$AX = AX_0$ ssi $A(X - X_0) = 0$

ssi $X - X_0 \in \operatorname{Ker} A$

L'ensemble des solutions de (E) est donc $X_0 + \operatorname{Ker} A$.

P.5) [$\forall t$, $f_1'(t) + a(t) f_1(t) = b_1(t)$

$f_2'(t) + a(t) f_2(t) = b_2(t)$

et on additionne ...]

P.6) [On note F la primitive de $-a$ qui s'annule en t_0
(Autrement dit, $\forall t \in I$, $F(t) = \int_{t_0}^{t} -a(u)\,du$)

puis on cherche une solution de (E) sur I sous la forme
$t \mapsto \lambda(t) e^{F(t)}$ où $\lambda : I \to \mathbb{K}$ et dérivable.

Alors λ convient ssi

$\forall t \in I,\ \lambda'(t) e^{F(t)} = b(t)$

ssi $\forall t \in I,\ \lambda'(t) = b(t)\, e^{-\int_{t_0}^{t} a(u)\,du}$.

$\lambda = t \mapsto \int_{t_0}^{t} b(x)\, e^{-\int_{t_0}^{x} a(u)\,du}\, dx$ convient

et l'ensemble des solutions de (E) est

$$\left\{ t \mapsto \left(\lambda + \int_{t_0}^{t} b(x) e^{-\int_{t_0}^{x} a(u)\,du}\right) e^{-\int_{t_0}^{t} a(u)\,du} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{K} \right\}$$

De plus, un calcul immédiat montre que $t \mapsto (\lambda + \cdots)$
satisfait la condition initiale $y(t_0) = y_0$ ssi $\lambda = y_0$

La solution de conditions initiales est donc

$$t \mapsto \left(y_0 + \int_{t_0}^{t} b(x)\, e^{-\int_{t_0}^{x} a(u)\,du}\right) e^{-\int_{t_0}^{t} a(u)\,du}. \quad]$$

$$y'' + ay' + by = f(t)$$

Lemme 7 | [$t \mapsto e^{\lambda t}$ est solution de (E_H) ssi

$$\forall t, \ \lambda^2 e^{\lambda t} + a\lambda e^{\lambda t} + b e^{\lambda t} = 0$$

ssi $\quad \lambda^2 + a\lambda + b = 0$]

Lemme 8 | [C'est une partie non vide de l'ensemble des fns 2 fois dérivables.

Si f_1 et f_2 sont élts de S_H ~~et~~ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$,

alors $\forall t, \quad f_1''(t) + af_1'(t) + b\, f_1(t) = 0$

$$f_2''(t) + a\, f_2'(t) + b\, f_2(t) = 0$$

et ainsi $\forall t, \ (\lambda f_1 + \mu f_2)''(t) + a(\lambda f_2 + \mu f_2)'(t) + b(\lambda f_1 + \mu f_2)(t) = 0$

et $\lambda f_1 + \mu f_2$ est donc encore une solution de (E_H).

S_H est donc bien un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.]

Th 9 |

Vérifions que si α est racine double de l'équation caractéristique, alors $f : t \mapsto t e^{\alpha t}$ est solution de (E_H) :

$$\forall t, \ f''(t) = (\alpha^2 t + 2\alpha)\, e^{\alpha t} \qquad f'(t) = (\alpha t + 1)\, e^{\alpha t}$$

et donc $\quad f''(t) + a\, f'(t) + b\, f(t)$

$$= (\alpha^2 t + 2\alpha + a(\alpha t + 1) + bt)\, e^{\alpha t}$$

$$= \Big[\underbrace{(\alpha^2 + a\alpha + b)}_{=0} t + \underbrace{2\alpha + a}_{=0}\Big] e^{\alpha t}$$

car α est racine double de $P(x) = x^2 + ax + b$

$f : t \mapsto t e^{\alpha t}$ est donc bien solution de (E_H).]

Ex. 10 | $\quad y'' + y' + y = 0$

$$S = \{ t \mapsto \lambda e^{jt} + \mu e^{j^2 t} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \}$$

$$\mathrm{Re}(e^{jt}) = \mathrm{Re}\left(\exp\left(\left(-\tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)t\right)\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left(e^{-\frac{1}{2}t}\, e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}t}\right) = \cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t\right) e^{-\frac{1}{2}t}$$

$$\mathrm{Im}(e^{jt}) = \sin\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t\right) e^{-\frac{1}{2}t}.$$

On en déduit que l'ensemble des solutions réelles de

$y''+y'+y=0$

est $\left\{ t \mapsto \left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right) e^{-\frac{1}{2}t} \mid (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2 \right\}$.

Exo 1, 2, 3, 10

$$y' + \frac{1}{2x}y = \frac{1}{2x(1-x)} \qquad (E_H)\ y' = -\frac{1}{2x}y$$

$$\int^x -\frac{dt}{2t} = -\frac{1}{2}\ln|x| \quad \text{donc} \quad S_H = \left\{ x \mapsto \frac{\lambda}{\sqrt{|x|}} \mid \lambda\in\mathbb{R} \right\}$$

On cherche une solution de (E) sur $I =]1,+\infty[$ sous la forme $x \mapsto \frac{\lambda(x)}{\sqrt{x}}$ où $\lambda : I \to \mathbb{R}$ est dérivable

λ convient ssi $\forall x\in I,\ \frac{\lambda'(x)}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2x(1-x)}$

$$\text{or } \int^x \frac{\sqrt{t}}{2t(1-t)}\,dt \underset{\substack{u=\sqrt{t}\\ du=\frac{1}{2\sqrt{t}}dt}}{=} \int^{\sqrt{x}} \frac{du}{1-u^2} = \int^{\sqrt{x}} \left(\frac{-\frac{1}{2}}{u-1} + \frac{\frac{1}{2}}{u+1} \right) du$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\right)$$

$$\frac{1}{1-X^2} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1}$$

$$a = -\frac{1}{1+X}\Big|_{X=1} = -\frac{1}{2}$$

$$b = \frac{1}{1-X}\Big|_{X=-1} = \frac{1}{2}$$

une solution de (E) est donc $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\right)$

et l'ensemble des solution de (E) sur I est

$$\left\{ x \mapsto \frac{\lambda}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\right) \mid \lambda\in\mathbb{R} \right\}$$

* Sur $J =]-\infty, 0[$

On cherche une solution de (E) sur J sous la forme $x \mapsto \frac{\lambda(x)}{\sqrt{-x}}$ où $\lambda : J \to \mathbb{R}$ est dérivable.

λ convient ssi $\forall x\in J,\ \frac{\lambda'(x)}{\sqrt{-x}} = \frac{1}{2x(1-x)}$

$$\text{or } \int^x \frac{\sqrt{-t}}{2t(1-t)}\,dt =$$