$(E)\ y'' + ay' + by = f(t)$

Cas de $f(t) = P(t)e^{\lambda t}$

On pose $g(t) = Q(t)e^{\lambda t}$, alors g est solution de (E)

ssi

$$\forall t \in I,\ (Q''(t) + 2\lambda Q'(t) + \lambda^2 Q(t))\, e^{\lambda t} + a\,(Q'(t) + \lambda Q(t))\, e^{\lambda t} + b\,Q(t)\, e^{\lambda t} = P(t)\, e^{\lambda t}$$

ssi $$Q''(X) + (2\lambda + a)\, Q'(X) + \underbrace{(\lambda^2 + a\lambda + b)}_{=0 \text{ ssi } \lambda \text{ est racine de l'équation caractéristique.}} Q(X) = P(X)$$

* Si λ n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherchera Q de même degré que P
* Si λ est racine simple de l'équation caractéristique, on cherchera Q tq $d(Q) = d(P) + 1$
* Si λ est racine double de l'équation caractéristique, on cherchera Q tq $d(Q) = d(P) + 2$.

$f(t) = K e^{\lambda t}$

$f(t) = K\cos(\omega t)$ ou $K\sin(\omega t)$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

On cherche une solution de

$$ay'' + by' + cy = Ke^{i\omega t}$$

et on en extrait la partie réelle (pour $f(t) = K\cos(\omega t)$)

ou la partie imaginaire (pour $f(t) = K\sin(\omega t)$)

Exercice : Résoudre

1) $y'' + 2y' + y = e^{2t} + e^{-t}$

2) $y'' + y' + y = \cos(2t)$

3) $y'' - 4y' + 4y = e^{2t}$.

1) L'équation caractéristique $x^2+2x+1=0$ admet -1 comme racine double. Ainsi l'ensemble des solutions de (E_H) $y''+2y'+y=0$ est

$$S_H = \{t \mapsto (\lambda+\mu t)e^{-t} \mid (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\}$$

On cherche une solution de $y''+2y'+y=e^{2t}$ sous la forme $t\mapsto Ae^{2t}$, alors A convient ssi

$\forall t,\ (4+4+1)A=1$ ssi $A=\frac{1}{9}$.

On cherche une solution de $y''+2y'+y=e^{-t}$ sous la forme $t\mapsto Q(t)e^{-t}$

Q convient ssi

$$\forall t\in\mathbb{R},\ (Q''(t)-2Q'(t)+Q(t))e^{-t}+2(Q'(t)-Q(t))e^{-t} + Q(t)e^{-t} = e^{-t}$$

ssi $\quad Q''(x)=1$

Ainsi $\quad Q(t)=\frac{t^2}{2}\quad$ convient.

L'ensemble des solutions de (E) est alors

$$\left\{t\longmapsto \left(\lambda+\mu t+\frac{t^2}{2}\right)e^{-t}+\frac{1}{9}e^{2t} \mid (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

2) $y''+y'+y=\cos(2t)$

L'équation caractéristique $x^2+x+1=0$ a pour racines $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\bar{j}$ donc

$$S_H = \left\{t\mapsto \left(\lambda\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+\mu\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)e^{-\frac{t}{2}} \mid (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

On cherche une solution de $y''+y'+y=e^{2it}$ sous la forme $t\mapsto Ae^{2it}$ où $A\in\mathbb{C}$.

A convient ssi $(-4+2i+1)A=1$

ssi $\quad A=\frac{1}{-3+2i}=\frac{-3-2i}{13}$

Une solution de $y''+y'+y=\cos(2t)$ est alors $t\mapsto \mathrm{Re}\left(\frac{-3-2i}{13}e^{2it}\right) = t\mapsto -\frac{3}{13}\cos 2t+\frac{2}{13}\sin 2t$

et l'ensemble des solutions de (E) est alors

$$\left\{ t \mapsto \left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right) e^{-\frac{t}{2}} - \frac{3}{13}\cos 2t + \frac{2}{13}\sin 2t \;\middle|\; (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

3) $y'' - 4y' + 4y = e^{2t}$

4) $y'' - 3y' + 2y = t\,e^{t}$.

3) $S_H = \{ t \mapsto (\lambda + \mu t) e^{2t} \mid (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \}$

Une solution de $y'' - 4y' + 4y = e^{2t}$ est $t \mapsto \frac{1}{2} t^2 e^{2t}$

donc $S = \{ t \mapsto (\lambda + \mu t + \frac{t^2}{2}) e^{2t} \mid (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \}$

4) $S_H = \{ t \mapsto \lambda e^{t} + \mu e^{2t} \mid (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \}$

On cherche une solution de E sous la forme $t \mapsto Q(t) e^{t}$

Q convient ssi

$$\forall t \quad (Q''(t) + 2Q'(t) + Q(t))e^{t} - 3(Q'(t) + Q(t))e^{t} + 2Q(t)e^{t} = t e^{t}$$

ssi $\forall t,\ Q''(t) - Q'(t) = t$.

$Q(t) = -\frac{t^2}{2} - t$ convient.

Ainsi $S = \{ t \mapsto (-\frac{t^2}{2} - t + \lambda) e^{t} + \mu e^{2t} \mid (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \}$.]

Thm 14 | II Un discute selon les racines de l'équation caractéristique.

* Si l'équation caractéristique admet deux racines $\alpha \neq \beta$ dans $\mathbb{K}$

alors l'ensemble des solutions de (E) est

$$\{ t \mapsto \varphi_0(t) + \lambda e^{\alpha t} + \mu e^{\beta t} \mid (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2 \}$$

Ainsi, si φ est solution de (E), il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$ tq

$$\forall t,\ \varphi(t) = \varphi_0(t) + \lambda e^{\alpha t} + \mu e^{\beta t}$$

φ satisfait les conditions initiales (t_0, y_0, y_1) ssi

$$(*) \begin{cases} \lambda e^{\alpha t_0} + \mu e^{\beta t_0} = y_0 - \varphi_0(t_0) \\ \lambda \alpha e^{t_0} + \mu \beta e^{t_0} = y_1 - \varphi_0'(t_0) \end{cases}$$

or le système $\begin{cases} x e^{\alpha t_0} + y e^{\beta t_0} = b_0 \\ x \alpha e^{\alpha t_0} + y \beta e^{\beta t_0} = b_1 \end{cases}$ est de Cramer car son déterminant est

$$\begin{vmatrix} e^{\alpha t_0} & e^{\beta t_0} \\ \alpha e^{\alpha t_0} & \beta e^{\beta t_0} \end{vmatrix} = (\beta-\alpha) e^{(\alpha+\beta)t_0} \neq 0$$

Ainsi il existe (λ,μ) unique satisfaisant $(*)$

et il existe donc bien une unique solution φ de E de conditions initiales (t_0, y_0, y_1).

$*$ On procède de même si l'équation caractéristique admet une racine double $\alpha \in \mathbb{K}$, ou si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et que l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées. $\square$

Exo 11 Sur $I =]-\infty, 0[$

$$S_H = \left\{ x \mapsto \frac{\lambda}{\sqrt{-x}} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

On cherche une solution de E sur I sous la forme

$x \mapsto \frac{\lambda(x)}{\sqrt{-x}}$ où λ est dérivable.

λ convient ssi $\forall x,\ \lambda'(x) = \frac{\sqrt{-x}}{2x(1-x)}$.

$$\text{or } \int^x \frac{\sqrt{-t}}{2t(1-t)}\,dt \underset{u=\sqrt{-t}}{=} \int^{\sqrt{-x}} \frac{du}{1+u^2} = \arctan(\sqrt{-x})$$

Il vient donc $S = \left\{ x \mapsto \frac{\arctan(\sqrt{-x}) + \lambda}{\sqrt{-x}} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

2, 3, 9, 10

$(E)\ (2+x)y' = 2-y$

L'équation homogène associée s'écrit :

$$y' = -\frac{y}{2+x}$$

$$\text{or } \int^x -\frac{dt}{2+t} = -\ln|2+x|$$

$$\text{donc } S_H = \left\{ x \mapsto \frac{\lambda}{|2+x|} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ x \mapsto \frac{\lambda}{2+x} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$x \mapsto 2$ est manifestement solution de (E) donc l'ensemble de ses solutions est $\left\{ x \mapsto 2 + \frac{\lambda}{2+x} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

Question supplémentaire : On cherche quelles sont les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$. On raisonne par analyse - synthèse :

Si f convient, alors f est solution de (E) sur $]-\infty, -2[$ ainsi que sur $]-2, +\infty[$ et ainsi il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tq

$$\forall x \in]-\infty, -2[, \quad f(x) = 2 + \frac{\lambda}{2+x}$$

et $$\forall x \in]-2, +\infty[, \quad f(x) = 2 + \frac{\mu}{2+x}.$$

De plus, f est partout dérivable (puisque solution d'une équation différentielle d'ordre 1) et ainsi elle admet une limite finie en 1 ce qui impose $\lambda = \mu = 0$ et on en déduit que f est la fonction constante $x \mapsto 2$.

Réciproquement, $x \mapsto 2$ convient, c'est donc l'unique solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

---

3. (E) $(1+x)y' + y = (1+x)\sin x$ sur $I =]-\infty, -1[$ ou $]-1, +\infty[$.

L'équation homogène associée s'écrit

$$y' = -\frac{1}{1+x} y$$

or $$\int^x -\frac{dt}{1+t} = -\ln|1+x|$$

d'où $$S_H = \left\{ x \mapsto \frac{\lambda}{1+x} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

On cherche une solution de (E) sous la forme :

$$x \mapsto \frac{\lambda(x)}{1+x} \quad \text{où } \lambda : I \to \mathbb{R} \text{ est dérivable.}$$

λ convient ssi : $$\forall x, \ (1+x)\frac{\lambda'(x)}{1+x} = (1+x)\sin x.$$

or $$\int^x (1+t)\sin t \, dt = \cdots = \sin x - (1+x)\cos x$$

Ainsi $$S = \left\{ x \mapsto \frac{\lambda + \sin x - (1+x)\cos x}{1+x} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 91 a) $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{(n!)^2}$

$$\frac{\frac{1}{(n+1)!^2}}{\frac{1}{(n!)^2}} = \frac{1}{(n+1)^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} t^n$$

donc le rayon de convergence de f est $+\infty$.

b) On a alors

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n!)^2} t^{n-1}$$

$$\frac{n}{(n!)^2} = \frac{1}{(n-1)!\, n!}$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!(n+1)!} t^n$$

$$f''(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!(n+1)!} t^{n-1}$$

et ainsi: $\quad t f''(t) + f'(t) - f(t)$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!(n+1)!} t^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!(n+1)!} t^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{(n!)^2}$$

$$= (1-1).t^0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\left[\frac{1}{(n-1)!(n+1)!} + \frac{1}{n!(n+1)!} - \frac{1}{(n!)^2} \right]} t^n$$

$$= \frac{n+1-(n+1)}{n!(n+1)!} = 0 \; !!!$$

f est donc bien solution de $ty'' + y' + y = 0$.

<u>Exo101</u>