



$$\forall z \in]-R, R[, f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

$$\forall z \in]-1, 1[, \ln(1+z) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$$

$$\forall z \in]-1, 1[, \arctan z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$$

$$1a) \quad \sum b_n$$

$$b_n = n \mapsto a_n z^n.$$

$$\|b_n\|_{\infty}^{[1,1]} = |a_n| \text{ or } \sum |a_n| \text{ converge donc}$$

$\sum b_n$ converge normalement sur $[1,1]$.

2a. le rayon de convergence de $\sum R_n z^n$

est $\sup \{ \rho \geq 0, (R_n \rho^n) \text{ est bornée} \}$

or (R_n) est bornée donc $1 \in \{ \rho \geq 0, (R_n \rho^n) \text{ est bornée} \}$

2.c. Soit $z \in]-1, 1[$,

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (R_{n-1} - R_n) z^n \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} R_{n-1} z^n - \sum_{n=1}^{+\infty} R_n z^n \\ &= a_0 + z \sum_{n=0}^{+\infty} R_n z^n - \sum_{n=1}^{+\infty} R_n z^n \\ &= a_0 + R_0 z + (z-1) \sum_{n=1}^{+\infty} R_n z^n. \end{aligned}$$

2d. Toujours pour $z \in [0, 1[$, $|g(z)|$

$$\leq (1-z) \left(\sum_{n=1}^{N-1} |R_n z^n| + \sum_{n=N}^{+\infty} |R_n z^n| \right)$$

$$\leq (1-x) \left[M_0 \sum_{n=1}^{N-1} x^n + M_N \sum_{n=N}^{+\infty} x^n \right]$$

$$\leq (1-x) \left[M_0 \frac{x-x^N}{1-x} + M_N \frac{x^N}{1-x} \right]$$

$$\leq \underline{M_0 (x-x^N) + M_N x^N}.$$

$$(E) \quad y' - 2t y = \exp(t^2)$$

L'équation homogène associée est

$$y' = 2t y$$

or une primitive de $t \mapsto 2t$ est $t \mapsto t^2$

$$\text{donc } S_H = \{ t \mapsto \lambda e^{t^2} \mid \lambda \in \mathbb{R} \}.$$

On cherche une solution de (E) sous la forme $t \mapsto \lambda(t) e^{t^2}$
où $\lambda: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable.

λ convient ssi

$$\forall t, \lambda'(t) e^{t^2} = e^{t^2}$$

$$\text{ssi } \forall t, \lambda(t) = 1$$

Une solution de (E) est ainsi $t \mapsto t e^{t^2}$

L'ensemble des solutions de (E) est alors

$$\{ t \mapsto (t+\lambda) e^{t^2} \mid \lambda \in \mathbb{R} \}.$$

$$T_0 = 1, \quad T_2 = X \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad T_{n+2} = 2X T_{n+1} - T_n.$$

Réponse déconseillée :

On fixe $X \in]1, +\infty[$, on définit $(\mu_n) = (T_n(X))$

$$\text{on a } \forall n, \quad \mu_{n+2} = 2X \mu_{n+1} - \mu_n$$

L'équation caractéristique $r^2 = 2X r - 1$

a pour racines $X - \sqrt{X^2 - 1}$ et $X + \sqrt{X^2 - 1}$

ainsi il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tq $\forall n, \mu_n = \lambda (X - \sqrt{X^2 - 1})^n + \mu (X + \sqrt{X^2 - 1})^n$

puis sachant $\mu_0 = 1$ et $\mu_1 = X$ alors $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$

$$\text{donc } \forall n, \quad \forall X > 1, \quad T_n(X) = \frac{1}{2} \left((X - \sqrt{X^2 - 1})^n + (X + \sqrt{X^2 - 1})^n \right).$$

$$\text{I.4 } T_{n+2}(\cos \theta) = 2 \cos \theta T_{n+1}(\cos \theta) - T_n(\cos \theta) \\ = 2 \cos \theta \cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta)$$

$$\text{II 1 } \int_{-1}^1 \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

$$t \mapsto \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} \text{ est continue sur }]-1, 1[$$

$$\text{de plus } \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} = o\left(\frac{1}{|t-1|^{\frac{1}{2}}}\right)$$

$$\text{or } t \mapsto \frac{1}{|t-1|^{\frac{1}{2}}} \text{ est int\acute{e}grable en 1 donc } t \mapsto \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} \text{ aussi}$$

$$\text{De m\^e } t \mapsto \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} \text{ est int\acute{e}grable en -1 et donc}$$

$$t \mapsto \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} \text{ est int\acute{e}grable sur }]-1, 1[\text{ ce qui prouve la convergence}$$

Exercice 1 Traduire l'assertion $E \neq F$ (o\`u E et F sont des ensembles)

$$\llcorner E \neq F \text{ssi } \exists x \in E, x \notin F \text{ ou } \exists y \in F, y \notin E.$$

$$\text{Exercice 1} \quad \mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$$

$$\mathcal{P}(\{a, b, c\}) = \{\{a, b, c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \emptyset\}$$

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{\{\emptyset\}, \emptyset\}.$$

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))) = \{\{\{\emptyset\}, \emptyset\}, \emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}.$$

$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \text{ssi } \exists i \in I, x \in A_i$$

$$x \in \bigcap_{i \in I} A_i \text{ssi } \forall i \in I, x \in A_i.$$

$$\text{P.51 } \llcorner \text{ Montrons } A \cup \left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \bigcap_{i \in I} (A \cup B_i).$$

$$\text{Soit } x \in A \cup \left(\bigcap_{i \in I} B_i\right),$$

$$\text{alors } x \in A \text{ ou } x \in \bigcap_{i \in I} B_i,$$

Si $x \in A$, alors pour tout $i \in I$, $x \in A \cup B_i$

donc $x \in \bigcap_{i \in I} (A \cup B_i)$

sinon, $x \in \bigcap_{i \in I} B_i$ et ainsi pour tout $i \in I$, $x \in B_i$
et à plus forte raison, $x \in A \cup B_i$

donc $x \in \bigcap_{i \in I} (A \cup B_i)$.

Soit maintenant $x \in \bigcap_{i \in I} (A \cup B_i)$, alors pour tout $i \in I$, $x \in A \cup B_i$.

Bien sûr, si $x \in A$ alors $x \in A \cup (\bigcap_{i \in I} B_i)$

et sinon c'est que pour tout i , $x \in B_i$

et ainsi $x \in \bigcap_{i \in I} B_i$ et aussi $x \in A \cup (\bigcap_{i \in I} B_i)$.

On a donc bien $A \cup (\bigcap_{i \in I} B_i) = \bigcap_{i \in I} (A \cup B_i)$. $\square$

Exo 2] $\mathbb{I} \quad \{\{a, b, c\}\}, \quad \{\{b\}, \{a, c\}\}, \quad \{\{c\}, \{a, b\}\}$
 $\{\{a\}, \{b, c\}\}, \quad \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}.$

$E \setminus F$

