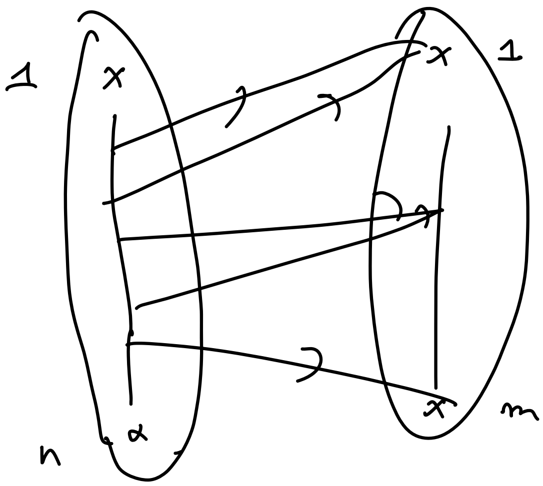
P.11) [On montre les implications $E\times F\neq\emptyset \Rightarrow E\neq\emptyset$ et $F\neq\emptyset$

et $E\neq\emptyset$ et $F\neq\emptyset \Rightarrow E\times F\neq\emptyset$.]

Lemme 12)



Si $\psi : [\![1,n]\!] \longrightarrow [\![1,m]\!]$ est une surjection,

on pose $\varphi : [\![1,m]\!] \longrightarrow [\![1,n]\!]$

$i \longmapsto \min \psi^{-1}[\{i\}]$

alors $\psi\circ\varphi = Id_{[\![1,m]\!]}$

comme $Id_{[\![1,m]\!]}$ est injective alors φ l'est à son tour

D'après i, on a alors $m\leqslant n$.]

D.13) [Si n et m sont élts de $\mathbb{N}^*$ et s'il existe

$\varphi : [\![1,n]\!] \to E$ et $\psi : [\![1,m]\!] \longrightarrow E$ des bijections

$\left([\![1,n]\!] \xrightarrow{\varphi} E \xrightarrow{\psi^{-1}} [\![1,m]\!] \right)$

alors $\psi^{-1}\circ\varphi$ est une bijection de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,m]\!]$

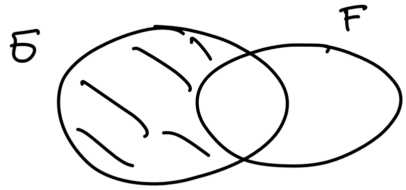
et d'après l.12, $n=m$.]

E.15) [$\varphi : [\![1,m-n+1]\!] \longrightarrow [\![n,m]\!]$

$k \longmapsto k+n-1$,

est une bijection.]

P.16) [Montrons la deuxième formule :



Posons $E' = E\setminus F$

alors E' et F sont disjoints et finis,

et $E'\cup F = E\cup F$

Par ailleurs, E' et $E\cap F$ sont aussi disjoints et finis et $E' \cup (E \cap F) = E$.

Ainsi (voir oubli juste après)

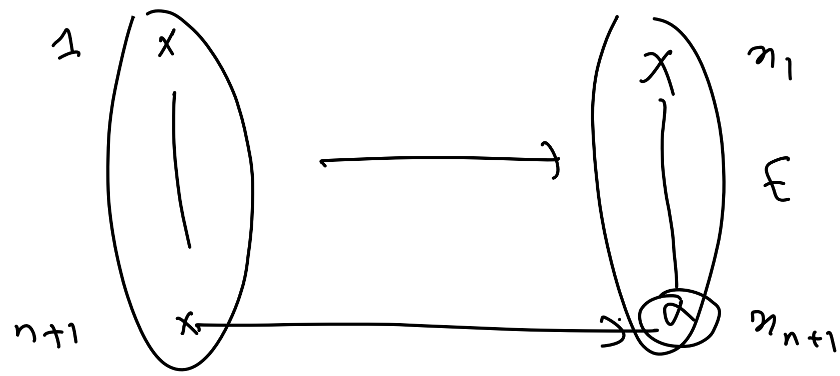
à la fois $\text{Card } E = \text{Card } E' + \text{Card } E \cap F$

et $E \cup F$ est fini et $\text{Card}(E \cup F) = \text{Card } E' + \text{Card } F$

donc $\text{Card}(E \cup F) = \text{Card } E + \text{Card } F - \text{Card}(E \cap F)$.]

Oubli :

Proposition : Si E est fini et $F \subset E$ alors F est fini et de plus, $\text{Card } F \leqslant \text{Card } E$ avec égalité si, et seulement si $E = F$.



$E' = E \setminus \{x_{n+1}\}$

$F' = F \setminus \{x_{n+1}\}$

F' est fini (HR)

$F = F'$ ou bien $F' \cup \{x_{n+1}\}$ ...]

Th.18) [iii Supposons $f : E \to F$ bijective et E fini.

alors en notant $n = \text{Card } E$ il existe $\varphi : [\![1, n]\!] \to E$ une bijection, puis $f \circ \varphi : [\![1, n]\!] \longrightarrow F$ est une bijection et ainsi F est fini de cardinal n à son tour.

Si c'est F qui est supposé fini, on conclut de même à l'aide de $f^{-1} : F \to E$ qui est bijective.

i. Si $f : E \longrightarrow F$ est injective et F fini

alors f induit une bijection de E dans $f[E]$, or $f[E] \subset F$ est un ensemble fini et $\text{Card } f[E] \leqslant \text{Card } F$.

donc E est fini et $\text{Card } E \; (= \text{Card } f[E]) \leqslant \text{Card } F$.]

Lemme 21) [Si $f : E \to F$ est surjective et que

$\forall y \in F$, $f^{-1}[\{y\}]$ est fini de cardinal p.

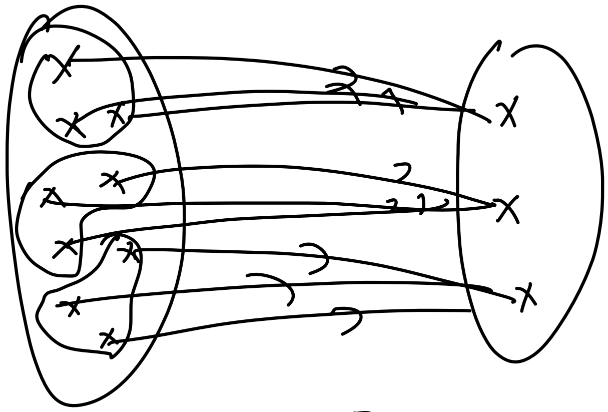
On sait déjà que si E est fini, F l'est à son tour.

Notons alors n le cardinal de F, $y_1, \dots, y_n$ ses élts.

On sait alors que $f^{-1}[\{y_1\}], \dots, f^{-1}[\{y_n\}]$ sont finis, disjoints et de réunion E.

Ainsi E est fini de cardinal

$$\sum_{i=1}^{n} \text{Card } f^{-1}[\{y_i\}] = \sum_{i=1}^{n} p = n \times p. \quad]$$



P.22] [On pose $f : E \times F \longrightarrow F$

$$(x,y) \longmapsto y$$

On suppose ici E et F non vides (sinon le résultat est trivial) alors f est une surjection et $f^{-1}[\{y\}]$ compte Card E éléments.

(lesquels sont $\{(x,y) \mid x \in E\}$ qui est équipotent à E)

F étant également fini, $E \times F$ l'est à son tour

et $\text{Card } E \times F = \text{Card } E \times \text{Card } F$ par le lemme des bergers.]

P.25] [E étant fini de cardinal p, ses élts peuvent s'écrire $x_1, \dots, x_p$.

Alors, à toute injection $f : E \to F$ on associe le p-uplet $(f(x_1), \dots, f(x_p))$ d'élts 2 à 2 distincts de F et on voit ainsi que l'ensemble de ces injections est en bijection (= équipotent) avec celui des p-uplets d'élts 2 à 2 distincts de F.

Il y a donc bien $\frac{n!}{(n-p)!}$ telles injections.]

P.27] [En numérotant $x_1, \dots, x_p$ les élts de E, alors il y a autant d'applications de E dans F qu'il y a de p-uplets $(y_1, \dots, y_p)$ d'élts de F, or il y a $\text{Card} F^p$ tels p-uplets.]

P.28/ [Démonstration par récurrence sur n.

Si $n=0$, c'est que $E=\emptyset$ et on a alors $\mathcal{P}(E)=\{\emptyset\}$ et ainsi $\mathcal{P}(E)$ est fini de cardinal 1.

ce qui initialise la récurrence.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose acquis que si E est fini de cardinal n, alors $\mathcal{P}(E)$ est fini de cardinal 2^n,

et soit E un ensemble fini de cardinal $n+1$.

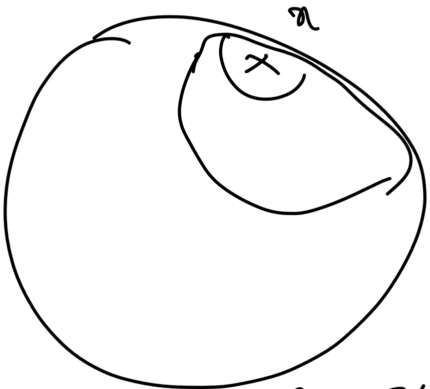
On note x un élt de E, et E' l'ensemble $E \setminus \{x\}$

alors E' est fini et de cardinal n. (et ainsi $\mathcal{P}(E')$ est fini et de cardinal 2^n).

Ainsi déjà, $\mathcal{P}(E')$ est une partie de $\mathcal{P}(E)$ de cardinal 2^n.

(il s'agit des parties de E qui ne contiennent pas x).

$\mathcal{P}(E) \setminus \mathcal{P}(E')$ est formé des parties de E qui contiennent x



également de cardinal 2^n car

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E') & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \setminus \mathcal{P}(E') \\ X & \longmapsto & X \cup \{x\} \end{array}$$

est une bijection.

Ainsi $\mathcal{P}(E)$ est fini de cardinal

$$\text{Card}\, \mathcal{P}(E') + \text{Card}\,(\mathcal{P}(E) \setminus \mathcal{P}(E')) = 2 \times 2^n = 2^{n+1}.$$

ce qui achève la récurrence.]

Thm 31/ [On rappelle qu'il y a $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ p-uplets $(x_1, \dots, x_p)$

d'élts 2 à 2 distincts de E. (bien sûr ici suppose $1 \leq p \leq n$)

(Bien sûr : si $p=0$, il y a 1 seule combinaison de p élts de E : $\emptyset$

et si $p>n$, il n'y en a aucune)

On construit alors

$$f : \left\{ \begin{array}{c} p\text{-uplets } (x_1, \dots, x_p) \\ \text{d'élts 2 à 2} \neq \text{ de } E \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{combinaisons de } p \text{ élts} \\ \text{de } E \end{array} \right\}$$

$$(x_1, \dots, x_p) \longmapsto \{x_1, \dots, x_p\}$$

Alors f est une surjection et une combinaison $\{x_1, \dots, x_p\}$ de p élts de E admet $p!$ antécédents

Ainsi par le lemme des bergers

$$\frac{n!}{(n-p)!} = p! \times \mathrm{Card}\{\text{combinaisons de } p \text{ élts de } E\}$$]