Exercice 3 | I

Soit E un ensemble de n élts.

Choisir une combinaison de p élts de E c'est du même coup choisir les n-p élts formant son complémentaire.

De ce fait $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

ii) Soit E un ensemble fini de n+1 élts et $x \in E$

on pose $E' = E \setminus \{x\}$

Parmi les combinaisons de p+1 élts de E, il y a celles qui

- contiennent x, formées des combinaisons de p élts de E' complétées de x et au nombre de $\binom{n}{p}$

- et celles qui ne contiennent pas x, lesquelles constituent aussi les combinaisons de p+1 élts de E', et au nombre de $\binom{n}{p+1}$

Ceci montre que $\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$

Soit E fini de cardinal n

iii) $k\binom{n}{k}$ est le cardinal de l'ensemble

$$\left\{ (x, C_k) \mid C_k \text{ est une combinaison de } k \text{ élts de } E,\ x \in C_k \right\}$$

Cet ensemble a aussi pour cardinal $n\binom{n-1}{k-1}$ car une fois x choisi parmi les n élts de E,

il existe $\binom{n-1}{k-1}$ combinaisons de k élts de E qui contiennent x.

Bien sûr, on a aussi $k\binom{n}{k} = k \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$

$$n\binom{n-1}{k-1} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$$

iv) Posons E et F finis de cardinaux respectifs n et m.

On dénombre ici les combinaisons de p élts de $E \cup F$

Or une combinaison de p élts de $E \cup F$ est

ou bien la réunion d'une combinaison de 0 élt de E et p élts de F

————————————— 1 ——— E $p-1$ ——— F

————————————— k élts de E et $p-k$ ——— F

————————————— p élts de E et 0 élt de F

Ainsi :

$$\binom{n+m}{p} = \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k} \cdot \binom{m}{p-k} \quad]$$

$\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable

On va montrer que $[0,1[$ n'est pas dénombrable

Supposons par l'absurde qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to [0,1[$ une bijection (ou une surjection)

on considère pour $k \in \mathbb{N}$,

$\varphi(k) = 0, c_0^k c_1^k c_2^k \ldots$ ← l'écriture décimale illimitée où $\forall k, \forall n$, $c_n^k \in [\![0,9]\!]$

on pose alors

$$x = 0, d_0 d_1 d_2 \ldots$$

où $d_k = 0$ si $c_k^k \neq 0$

$d_k = 1$ si $c_k^k = 0$

alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $x \neq \varphi(k)$ ce qui est impossible

(Plus généralement, ce raisonnement montre que si $\varphi : \mathbb{N} \to [0,1[$ alors φ n'est pas surjective).

P.321 [On sait que si E est fini et si $F \subset E$ est en bijection avec E alors F est fini de même cardinal que E

Mais alors $F \subset E$ et $\mathrm{Card}\, F = \mathrm{Card}\, E$

donc $F = E$...

De ce fait, si $F \subsetneq E$ et si F et E sont équipotents (en bijection l'un avec l'autre), alors E ne peut qu'être infini. $\rrbracket$.

<u>Lemme 36</u> $\llbracket$ On note $\varphi : E \to \mathbb{N}$ une injection,

on pose alors $I = \varphi[E]$ $(\subset \mathbb{N})$

mais alors E et I sont équipotents ce qui fait

de E un ensemble au plus dénombrable. $\rrbracket$

<u>Lemme 37</u> $\llbracket$ On note $\varphi : \mathbb{N} \to E$ une surjection.

On note alors

$$I = \{\min \varphi^{-1}[\{x\}] \mid x \in E\} \quad (\subset \mathbb{N})$$

et on remarque que φ induit une bijection de I dans E

ce qui montre que E est au plus dénombrable. $\rrbracket$

<u>Lemme 38</u> $\llbracket$ Soit A une partie de $\mathbb{N}$,

Si A est majorée, en notant N un majorant de A alors

$A \subset \llbracket 0, N \rrbracket$ et on sait qu'alors A est finie.

Sinon, on note a_0 le plus petit élt de A (bien sûr, $A \neq \emptyset$)

puis on note a_1 le plus petit élt de $A \setminus \{a_0\}$

et ainsi de suite.

Ce procédé ne saurait s'interrompre car sinon, cela

voudrait dire qu'il existe N tq $A \setminus \{a_0, a_1, \ldots, a_N\}$ soit vide

et ainsi on aurait $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_N\}$ et a_N serait le

plus grand élt de A et donc un majorant, ce qui est contradictoire

Mais alors on construit ainsi (a_n) une suite de A et on

remarque que $n \in \mathbb{N} \mapsto a_n$ est une bijection de $\mathbb{N}$ dans A

et A est donc alors dénombrable. $\rrbracket$

<u>P.39</u> $\llbracket$ E est au plus dénombrable ssi il est en bijection (= équipotent)

avec une partie I de $\mathbb{N}$.

Si celle-ci est finie, alors E l'est aussi.

Si I est dénombrable, alors $\mathbb{N}$, I et E sont en bijection

les uns avec les autres, et E est alors dénombrable.

Réciproquement, si E est fini alors en notant $n = \text{Card } E$ il existe $\varphi : [\![1, n]\!] \longrightarrow E$ une bijection et ainsi E est au plus dénombrable.

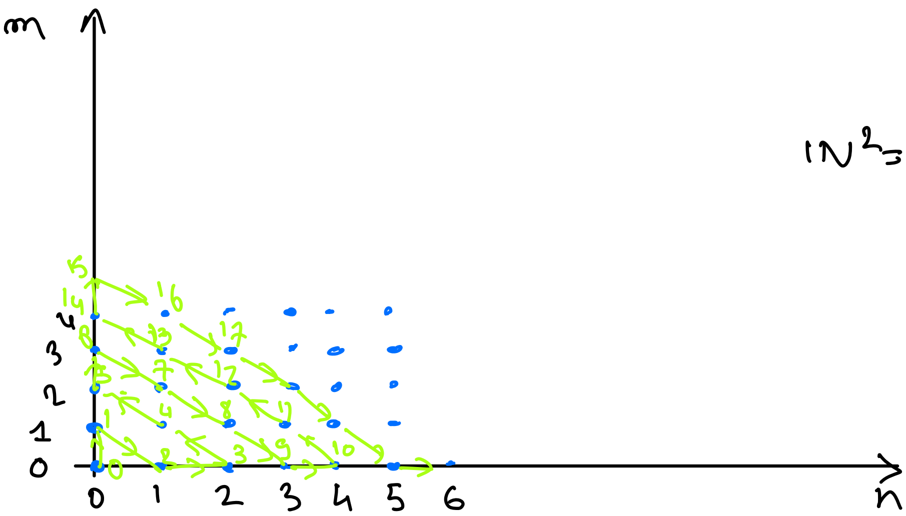
Enfin, si E est dénombrable alors il existe $\varphi : \mathbb{N} \to E$ une bijection et bien sûr alors E est aussi au plus dénombrable. $]\!]$

P.40 | $[\![$ On pose $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$

$$2k \longmapsto k$$
$$2k+1 \longmapsto -k-1$$

et on remarque que φ est bien une bijection

Donc $\mathbb{Z}$ est dénombrable.



$\mathbb{N}^2 = \{(n,m) \mid n \in \mathbb{N} \text{ et } m \in \mathbb{N}$

P.41 | $[\![$ On remarque que si E est au plus dénombrable et $F \subset E$ alors F est au plus dénombrable.

En effet, si $I \subset \mathbb{N}$ et $\varphi : I \longrightarrow E$ est bijection, alors en notant $J = \varphi^{-1}[F]$, on a encore $J (\subset I) \subset \mathbb{N}$ et φ réalise une bijection de J dans F si bien que F est au plus dénombrable à son tour.

Montrons le cas particulier suivant :

on suppose que $\forall n$, E_n est dénombrable et que les ensembles E_n sont 2 à 2 disjoints.

Alors il existe pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n : \mathbb{N} \longrightarrow E_n$ une bijection.

On pose alors $\varphi : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$

$$(n,m) \longmapsto \varphi_n(m)$$

Un vérifie que φ est une bijection.

De plus, on sait qu'il existe $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ une bijection et ainsi $\bigcup E_n$ est dénombrable.]

Motivation : $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente, mais pas absolument.

Exo 5 Probas (dénombrement)

1). Un rangement revient au choix d'une application de $\{\text{objets}\}$ dans $\{\text{tiroirs}\}$ et il y a $\text{Card}\{\text{tiroirs}\}^{\text{Card}\{\text{objets}\}} = n^p$ telles applications.

2) Ici, un rangement de nos p objets correspond à
- un arrangement de p tiroirs (parmi les n tiroirs)

ou, si on préfère, à une injection de $\{\text{objets}\}$ dans $\{\text{tiroirs}\}$.

Il y a alors $\frac{n!}{(n-p)!}$ tels rangements.

3) Ici, un rangement de p objets revient au choix des p tiroirs qui chacun contiendront l'un d'eux,

et le nombre de ces rangements est le nombre de combinaisons de p tiroirs parmi les n, c-à-d $\binom{n}{p}$

4)

Exemple si $n = 4$ et $p = 3$

1er tiroir, 2ième tiroir, 3ième tiroir, 4ième tiroir

$| * | | | * * | |$

1 2 3 4 5 6

$| * | | | | | * | * | |$

$\binom{n+p-1}{p}$

$| * * * | |$

1 2 3 4 5 6

$| | | * | * | * | | | | |$

$n=6,\ p=7$

$\binom{n}{p}$ dénombre les mots de n lettres formés de p fois la lettre S et $n-p$ fois la lettre E

$$\boxed{E \,|\, S \,|\, E \;|\, E \,|\, S \,|\, S \;|\, E}$$
$1 \quad 2 \quad 3 \quad - \quad — \quad n$

4) A un rangement correspond une écriture de $p+n-1$ symboles parmi lesquels $*$ apparaît p fois et $|$ apparaît $n-1$ fois.

Il y a alors $\binom{p+n-1}{p}$ telles écritures (la position des p symboles $*$ détermine uniquement l'une d'elle).

Autre version : Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

Déterminer le nombre de n-uplets $(x_1, -, x_n)$ d'entiers tels que $1 \leqslant x_1 < x_2 < \cdots < x_n \leqslant p$.

Réponse : $\binom{p}{n}$ car bien sûr il y a autant de tels n-uplets que de combinaisons de n élts de $[\![1, p]\!]$

Déterminer le nombre de n-uplets $(x_1, -, x_n)$ d'entiers tels que $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant p$

[Si $(x_1, -, x_n)$ convient, alors

$$0 \leqslant x_1 < x_2+1 < x_3+2 < \cdots < x_n+n-1 \leqslant p+n-1$$

(et réciproquement !)]

on en déduit qu'il y a $\binom{p+n-1}{n}$ tels n-uplets.