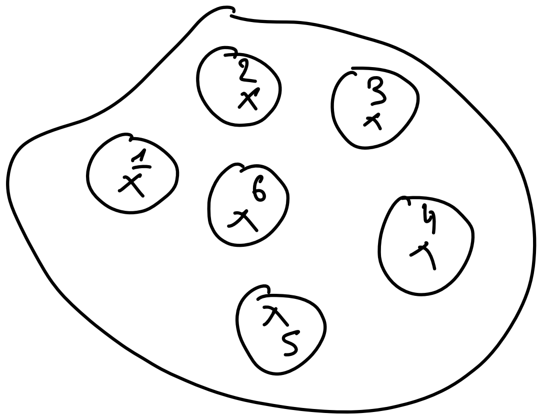
$$I = \{ i_k \mid k \in \mathbb{N} \}$$

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} x_{i_k}$$

$$\sum_{i \in I} x_i \qquad \left\{ \sum_{j \in J} x_j \mid J \subset I \text{ et } J \text{ fin.} \right\}$$

Si $M' < M$ où $M = \sup \{ \sum x_j \mid --- \}$

$\Omega =$ 

$x \quad \{x\}$

Si $A \cap B = \emptyset$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$P(\{1\}) --- P(\{6\})$
déterminent P.

Exemple 51

I Deux univers possibles :

Tirages infinis en toute circonstance (voir poly)

$$\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$$

ou bien

$$\Omega = \{ (P), (F,P), (F,F,P), ---, (F, ---, F, P), ---, \underbrace{(F, ---)}_{\text{infinité de } F\,!} \}$$

]

Exemples : Si Ω est fini (ou pas, d'ailleurs !)
$\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu sur Ω.

Si $\Omega = \{a, b, c\}$,
$\mathcal{A} = \{ \emptyset, \{a\}, \{b,c\}, \{a,b,c\} \}$ est une tribu sur Ω
$\{ \emptyset, \{a,b,c\} \}$ en est une autre.

P.54) II $\Omega \in \mathcal{A}$ et donc $\overline{\Omega} = \emptyset \in \mathcal{A}$.

Soit (A_n) une suite d'événements :
alors $\forall n$, $\overline{A_n} \in \mathcal{A}$,

puis $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} \in \mathcal{A}$

or $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}}$ et ainsi $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Soient $A_1, \dots, A_n$ des évènements, alors on pose $\forall k > n$, $A_k = A_n$.

Ainsi : $(A_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une famille d'évènements,

donc $\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} A_k$ et $\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} A_k$ sont des évènements,

or $\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} A_k = A_1 \cup \dots \cup A_n$

et $\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} A_k = A_1 \cap \dots \cap A_n$.]

P. 56 | [

1 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \emptyset$

alors, les A_n sont 2 à 2 incompatibles

et, par σ-additivité : $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\emptyset)$

La convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\emptyset)$ nécessite que $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

2. On pose pour tout $k > n$, $A_k = \emptyset$

et ainsi : $(A_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une famille d'évènements 2 à 2 incompatibles et ainsi, par σ-additivité :

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} A_k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \overbrace{\mathbb{P}(A_k)}^{=0 \text{ si } k>n}$$

$$= \mathbb{P}(A_1) + \dots + \mathbb{P}(A_n).$$

3. Soit $A \in \mathcal{A}$, $\Omega = A \cup \overline{A}$ et A et $\overline{A}$ sont incompatibles

donc $\underbrace{\mathbb{P}(\Omega)}_{=1} = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A})$

4. Si $A \subset B$: $B = A \cup (B \setminus A)$ ← union disjointe

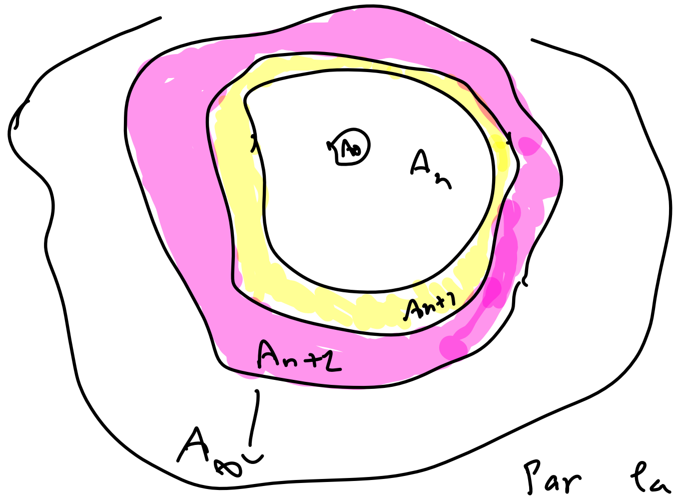
donc $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A)$.

5. $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$

et $B = (A \cap B) \cup (B \setminus A)$) unions disjointes,

]

P. 57 | [



1. On pose $B_0 = A_0$

et $\forall n > 0$, $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$.

Alors, (B_n) est une famille d'événements 2 à 2 incompatibles.

et $\bigcup_{k=0}^{n} B_k = A_n$.

Par la σ-additivité,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} B_k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B_k)$$

ce qui montre que $\left(\mathbb{P}(A_n)\right)$ $\left(= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(B_k) \right)$ converge vers $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} B_k\right)$.

or $\bigcup_{k=0}^{+\infty} B_k = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$.

(en fait, pour tout n, $\bigcup_{k=0}^{n} B_k = A_n = \bigcup_{k=0}^{n} A_k$.

on a donc bien <u>montré que</u> $(\mathbb{P}(A_n))$ converge vers $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$.

2. Posons pour tout n, $B_n = \overline{A_n}$

alors (B_n) forme une suite croissante d'événements.

et donc d'après 1,

$$(\mathbb{P}(B_n)) \text{ converge vers } \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right).$$

or $\forall n$, $\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(\overline{A_n}) = 1 - \mathbb{P}(A_n)$.

Puis $\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n} = \overline{\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n}$

$$\text{Ainsi } \mathbb{P}(B_n) \longrightarrow 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$$

ce qui montre que $\mathbb{P}(A_n) \longrightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right)$.

3. On a déjà vu que pour tous événements A et B

$\mathbb{P}(A \cup B) \leqslant \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

On montre ensuite par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que pour tous évènements $A_1, \dots, A_n$,

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n) \leqslant \mathbb{P}(A_1) + \dots + \mathbb{P}(A_n).$$

En notant dorenavant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n = A_0 \cup \dots \cup A_n$

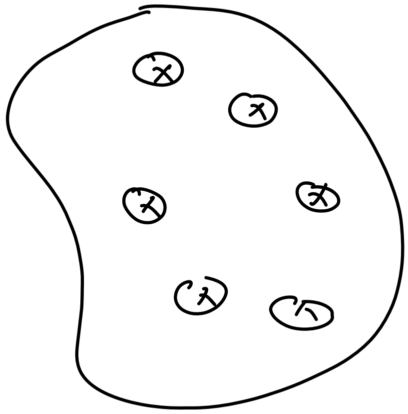
alors (B_n) est une suite croissante d'évènements donc d'après le thm de continuité croissante,

$(\mathbb{P}(B_n))$ converge de limite $\mathbb{P}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n) = \mathbb{P}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n)$

or pour tout n, $\mathbb{P}(B_n) \leqslant \mathbb{P}(A_0) + \dots + \mathbb{P}(A_n)$

donc, à la limite quand $n \to +\infty$:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n). \quad \blacksquare$$



Ω

$A = \{x_1, \dots, x_n\}$

$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\{x_i\})$

Si $A = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ où les x_i sont 2 à 2 distincts :

alors par σ-additivité :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{x_n\})$$

Thm 59 [Si $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est muni de la loi $\mathbb{P}$,

alors par σ-additivité, en notant $\Omega = \{\omega_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ où les ω_n sont 2 à 2 $\neq$, $\sum \mathbb{P}(\{\omega_n\})$ converge de somme $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

ce qui indique que $(\mathbb{P}(\{\omega\}))$ est sommable de somme 1.

Si réciproquement $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ est une famille de réels positifs sommable de somme 1, alors on vérifie que

en posant $\forall A \subset \Omega$, $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega$.

$\mathbb{P}$ est bien une probabilité sur Ω :

$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$$

Puis, si $A \subset \Omega$, $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega \geq 0$

et $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\bar{A}) = \sum_{\omega \in A} p_\omega + \underbrace{\sum_{\omega \in \bar{A}} p_\omega}_{\geq 0}$

$= \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$

et donc $\mathbb{P}(A) \leq 1$.

Soit enfin (A_n) une suite d'événements 2 à 2 incompatibles, alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{\omega \in \cup A_n} p_\omega = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\omega \in A_n} p_\omega$$ (sommation par paquets P.48)

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$ ce qui établit la σ-additivité de $\mathbb{P}$.

Bien sûr, pour tout $\omega \in \Omega$, $\mathbb{P}(\{\omega\}) = p_\omega$.]

P.62 | [Par définitions d'une probabilité conditionnelle :

$$\mathbb{P}(A_1)\, \mathbb{P}(A_2 | A_1) \cdots \mathbb{P}(A_n | A_1 \cap \cdots A_{n-1})$$

$$= \cancel{\mathbb{P}(A_1)} \frac{\cancel{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)}}{\cancel{\mathbb{P}(A_1)}} \times \frac{\cancel{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}}{\cancel{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)}} \cdots \times \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n)}{\cancel{\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})}}$$

$$= \mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n).$$]

Exemple : Une urne contient 10 boules blanches et 10 boules noires.

On tire sans remise 3 boules de l'urne.

Avec quelle probabilité obtient-on deux boules blanches suivies d'une boule noire ?

[A = " la première boule est blanche "

B = " la deuxième ———————— "

C = " la troisième est noire ".

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\, \mathbb{P}(B | A)\, \mathbb{P}(C | A \cap B)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{9}{19} \times \frac{10}{18}$$]

Remarque : Si on cherche plutôt la probabilité d'obtenir 3 boules blanches consécutives :

par la formule des probabilités composées on obtient la probabilité : $\frac{10}{20} \times \frac{9}{19} \times \frac{8}{18}$.

<u>Autre calcul possible</u> : Il y a $\binom{20}{3}$ tirages possibles (où l'ordre est négligé) de trois boules de l'urne, dont $\binom{10}{3}$ sont formés de 3 boules blanches.

La probabilité recherchée vaut donc $\dfrac{\binom{10}{3}}{\binom{20}{3}} = \dfrac{10 \times 9 \times 8}{3!} \times \dfrac{3!}{20 \times 19 \times 18}$

<u>P. 6</u>| II Démonstration dans le cas où I est dénombrable

et on suppose que $k \mapsto i_k$ est une bijection de $\mathbb{N}$ dans I.

alors $(B \cap A_{i_n})_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille d'évènements 2 à 2 incompatibles

De plus $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (B \cap A_{i_n}) = B \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{i_n} \right)$

Donc, par σ-additivité :

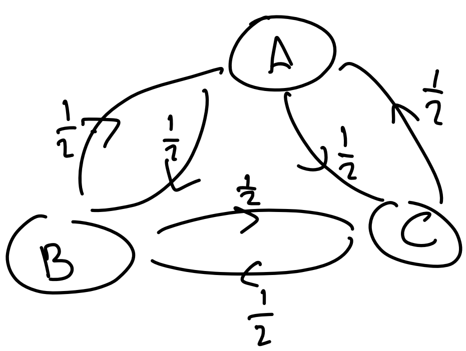
$$\mathbb{P}(B \cap (\cup A_{i_n})) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B \cap A_{i_n}).$$

or $$\mathbb{P}(B \cap (\cup A_{i_n})) = \mathbb{P}(B) + \underbrace{\mathbb{P}(\cup A_{i_n})}_{1} - \underbrace{\mathbb{P}(B \cup (\cup A_{i_n}))}_{1}$$

et on a donc bien

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B \cap A_{i_n}). \quad \square$$

<u>Exemple</u> : Un chameau se déplace d'un point d'eau à un autre. A $t=0$ il est au point A, et à chaque étape, il choisit avec une égale probabilité un autre point d'eau.



On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

A_n l'évènement : "au temps n, le chameau est en A"

B_n l'évènement : ———— ———— B

C_n ———— ———— C.

Trouver des relations de récurrence entre $\mathbb{P}(A_{n+1}), \mathbb{P}(B_{n+1}), \mathbb{P}(C_{n+1})$ et $\mathbb{P}(A_n), \mathbb{P}(B_n), \mathbb{P}(C_n)$

[A_n, B_n, C_n forme un système complet d'évènements

D'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_{n+1} \mid A_n)\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1} \mid B_n)\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(A_{n+1} \mid C_n)\mathbb{P}(C_n)$$

$$= 0 \times \mathbb{P}(A_n) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(B_n) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(C_n). \quad]$$

T. 65) [Par définition d'une probabilité conditionnelle :

$$P(A \cap B) = \mathbb{P}(A \mid B)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \mid A)\mathbb{P}(A) \ldots \quad]$$

Exercice 12) [On note B l'évènement " le test est positif "

A ——— " la personne est malade ".

D'après la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B \mid A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \mid \bar{A})\mathbb{P}(\bar{A})} = \frac{0{,}95 \times 0{,}03}{0{,}95 \times 0{,}03 + 0{,}1 \times 0{,}97}$$

$= 0{,}24$ à 10^{-2} près.

$\mathbb{P}(\bar{A} \mid B) = 1 - \mathbb{P}(A \mid B) = \underline{0{,}76 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}}$.

]

B \ A	1	2	3	4	5	6
1	P	I	P	I	P	I
2	I	P	I	P	I	P
3	P					
4						
5						
6						

$A \cap B = A \cap C = B \cap C$

$A \cap B \cap C = A \cap B$

T. 70) [Démonstration pour deux évènements A et B indépendants.

On montre que A et $\bar{B}$, $\bar{A}$ et B, $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants.

$\mathbb{P}(A \cap \bar{B}) + \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)$ (formule des probabilités totales)

donc $\mathbb{P}(A \cap \bar{B}) = \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\bar{B})$

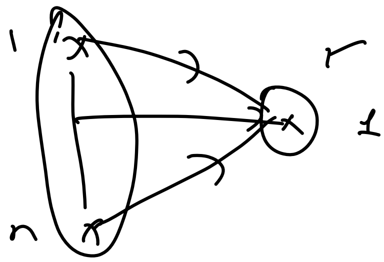
donc A et $\overline{B}$ sont indépendants.

De m̂ (en échangeant le rôle de A et B), $\overline{A}$ et B sont indépendants, puis $\overline{A}$ et $\overline{B}$ le sont encore.

Cas général : admis]

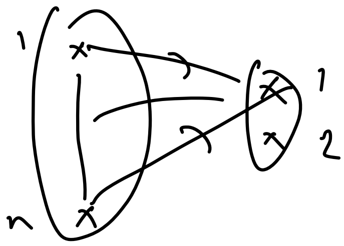
Exercice 11

I $S_{n,1} = 1$



une seule application ici, et elle est surjective.

$S_{n,2} = 2^n - 2$



2^n applications de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,2]\!]$ dont exactement 2 ne sont pas surjectives.