$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \, dt$

$f : A \times I \longrightarrow \mathbb{K}$

$(x,t) \longmapsto f(x,t)$

$f(x,t) = \exp(x t^2)$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = t^2 \exp(xt^2)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = t^4 \exp(xt^2)$

Th2) II Notons pour tout $x \in A$,

$$g(x) = \int_I f(x,t)\,dt$$

(D'après nos hypothèses, $\forall x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I)

et soit $x_0 \in A$, et soit (u_n) une suite de A qui converge de limite x_0.

On va montrer que $g(u_n) \longrightarrow g(x_0)$ ce qui par le thm de caractérisation séquentielle des limites montrera que g est continue en x_0.

On pose alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$f_n : I \longrightarrow \mathbb{K}$

$t \longmapsto f(u_n, t)$

Mais alors $\forall t \in I$, $f(u_n,t) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x_0,t)$

et ainsi (f_n) converge simplement vers $t \mapsto f(x_0,t)$

On a bien sûr, $\forall n$, f_n continue par morceaux sur I

ainsi que $t \mapsto f(x_0,t)$ continue par morceaux sur I

et de plus, $\forall n$, $\forall t \in I$, $|f_n(t)| \leqslant \varphi(t)$

et φ est intégrable sur I

donc d'après le thm de convergence dominée

$$\int_I f_n(t)\,dt \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_I f(x_0,t)\,dt$$

c-à-d $g(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} g(x_0)$

Ainsi g est continue en x_0]

Thm 4 [Même arguments : caractérisation séquentielle d'une limite et thm de convergence dominée.

Exemple : Déterminer la limite quand $x \to +\infty$ de

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^x} \, dt$$

[On peut noter que pour $x \geq 1$

alors $\forall t \in [0,1]$, $|e^{-t^x}| \leq 1$

$\forall t \geq 1 \qquad |e^{-t^x}| \leq e^{-t}$

or $\varphi : \begin{cases} t \leq 1 \mapsto 1 \\ t > 1 \mapsto e^{-t} \end{cases}$ est continue par morceaux

et intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Bien sûr, $\forall x \geq 1$, $t \mapsto e^{-t^x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$

ce qui dès lors justifie la convergence de $\int_0^{+\infty} e^{-t^x} dt$

Puis on observe que

Si $0 \leq t < 1$, $e^{-t^x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} e^{-0} = 1$

$$e^{-1^x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \frac{1}{e}$$

Si $t > 1$, $e^{-t^x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

Bien sûr, la fonction $\begin{cases} t < 1 \mapsto 1 \\ 1 \mapsto \frac{1}{e} \\ t > 1 \mapsto 0 \end{cases}$ est continue par morceaux

Donc d'après le thm de convergence dominée à paramètre continu :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^x} dt \longrightarrow \int_0^1 1 \, dt = 1.$$

]

Thm 5 [

$$\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} = \int_I \frac{f(x_0+h,t) - f(x_0,t)}{h} \, dt$$

Dominer $\dfrac{f(x_0+h,t)-f(x_0,t)}{h}$?

$\forall t$, $\quad x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 donc

$$f(x_0+h,t)-f(x_0,t) = \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{\partial f}{\partial x}(u,t)\,du$$

puis $|f(x_0+h,t)-f(x_0,t)| \leqslant \left|\int_{x_0}^{x_0+h} \underbrace{\left|\frac{\partial f}{\partial x}(u,t)\right|}_{\leqslant \varphi(t)} du\right|$

$$\leqslant |h|\,\varphi(t)$$

et donc $\left|\dfrac{f(x_0+h,t)-f(x_0,t)}{h}\right| \leqslant \varphi(t)$.

En posant $T : h \neq 0 \mapsto \dfrac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} = \displaystyle\int_I \frac{f(x_0+h,t)-f(x_0,t)}{h}\,dt$

alors on a

$\forall t \in I$, $\quad \dfrac{f(x_0+h,t)-f(x_0,t)}{h} \xrightarrow[h \neq 0]{} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)$

$\forall h \neq 0$ (tq $x_0+h \in A$), $t \mapsto \dfrac{f(x_0+h,t)-f(x_0,t)}{h}$ continue par morceaux

$t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)$ continue par morceaux.

et on a bien φ intégrable tq ---

alors d'après le thm de convergence dominée à paramètre continu : $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)$ est intégrable sur I

et T a pour limite $\displaystyle\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,dt$

en 0 à gauche et en 0 à droite

Ainsi g est dérivable en x_0 et $g'(x_0) = \displaystyle\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,dt$

La continuité de g' s'établit donc en vertu du thm 2. $\square$

<u>Exercice 1</u> | $\mathbb{C}$ On pose $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}^+$, $f(x,t) = \dfrac{e^{ixt}}{1+t^3}$

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$

et $f(x,t) \underset{t\to\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^3}\right)$

et donc $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

$\forall t \geq 0$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$

et $\forall x, \forall t$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{it\, e^{ixt}}{1+t^3}$

et $\forall x, \forall t$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \frac{t}{1+t^3}$

et on remarque que $t \mapsto \frac{t}{1+t^3}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$

Mais alors g est de classe C^1 et

$\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{it\, e^{ixt}}{1+t^3}\, dt$.]]

<u>Exo2</u> [[Soit $x \in \mathbb{R}^*$,

f étant de classe C^n où $n \geq 1$,

alors $f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)\, dt$

et donc $\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{1}{x}\int_0^x f'(u)\, du$

or $\underset{u=tx}{=} \int_0^1 f'(tx)\, dt$

On a alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f'(tx)$ intégrable sur $[0,1]$

$\forall t$, $x \mapsto f'(tx)$ de classe C^{n-1}

On pose $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall t \in [0,1]$, $h(x,t) = f'(tx)$

alors $\forall x, \forall t$, $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $\frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,t) = t^k f^{(k+1)}(tx)$

Bien sûr $t \mapsto \frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,t)$ est continue sur $[0,1]$

Puis, étant donné $a > 0$, ~~8~~ pour $1 \leq k \leq n-1$,

$f^{(k+1)}$ est continue sur $[-a,a]$ à valeurs réelles donc

est bornée et atteint ses bornes et on peut donc

poser $M_k = \sup\{|f^{(k+1)}(t)| \ t \in [-a,a]\}$

Mais alors $\forall x \in [-a, a]$, $\forall t \in [0,1]$, $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$,

$$\left| \frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,t) \right| \leqslant M_k$$

Mais alors h est de classe C^{n-1} sur $[-a,a]$

(et donc aussi sur $\bigcup_{a>0} [-a,a] = \mathbb{R}$).

16, 18

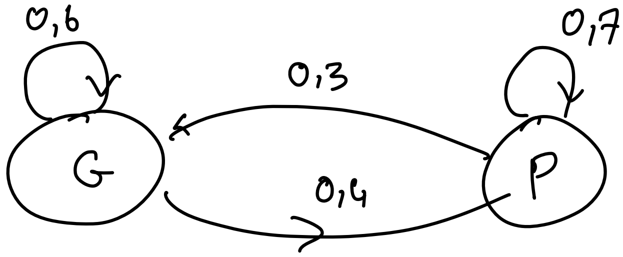
16 A est l'événement "l'objet est dans le meuble"

B ———— "l'objet n'est pas dans les 6 premiers tiroirs"

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|\bar{A})\mathbb{P}(\bar{A})} = \frac{1/7 \times p}{1/7 \times p + 1 \times (1-p)}$$

$$= \frac{p}{p+7-7p} = \frac{p}{7-6p}$$

18) 1



Soit $n \in \mathbb{N}^*$, G_n et $\overline{G_n}$ forment un système complet d'événements

Ainsi, d'après la formule des probabilités totales

$$\mathbb{P}(G_{n+1}) = \mathbb{P}(G_{n+1} | G_n)\mathbb{P}(G_n) + \mathbb{P}(G_{n+1} | \overline{G_n})\mathbb{P}(\overline{G_n})$$

En d'autres termes :

$$u_{n+1} = 0,6 \cdot u_n + 0,3\, v_n$$

et, de m. $v_{n+1} = 0,7\, v_n + 0,4\, u_n$

Ainsi $\begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 \\ 0,4 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}$

Par ailleurs $u_1 = v_1 = \frac{1}{2}$.

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$ où $A = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 \\ 0,4 & 0,7 \end{pmatrix}$

$$A - I_2 = \begin{pmatrix} -0,4 & 0,3 \\ 0,4 & -0,3 \end{pmatrix} \quad \text{et } \operatorname{Ker}(A - I_2) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$$

$$A - 0,3\, I_2 = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 \\ 0,4 & 0,4 \end{pmatrix} \quad \text{et } \operatorname{Ker}(A - 0,3\, I_2) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

Ainsi $A = P D P^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,3 \end{pmatrix}$

$$P^{-1} = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Donc $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^{n-1}\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = P D^{n-1} P^{-1}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{14} P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,3^{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0,3^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 6 + 0,3^{n-1} \\ 8 - 0,3^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} + \frac{0,3^{n-1}}{14} \\ \frac{4}{7} - \frac{0,3^{n-1}}{14} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow u_n \\ \leftarrow v_n \end{matrix}$$

17 1) $k-1$ échecs suivis d'un succès :

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1} \times \frac{1}{n}$$