Prop. 2) [Soit U une partie de $X(\Omega)$

U est une partie de $X(\Omega)$ qui est fini ou dénombrable et donc il l'est à son tour.

Puis $X^{-1}(U) = \underbrace{\bigcup_{x \in U} X^{-1}(\{x\})}_{\text{union finie ou dénombrable d'évènements}}$

et on reconnaît un évènement.]

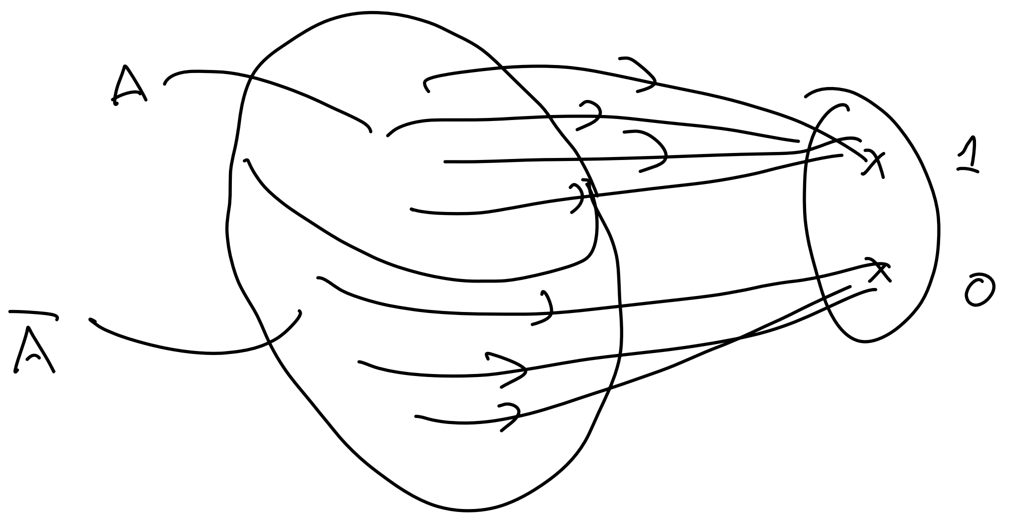
Remarque : Si $F \subset E$, $X^{-1}(F) \in \mathcal{A}$ car, en posant

$U = F \cap X(\Omega)$

alors $X^{-1}(F) = X^{-1}(U)$

car $X^{-1}(F) = X^{-1}(F \cap X(\Omega)) \cup \underbrace{X^{-1}(F \cap \overline{X(\Omega)})}_{= \emptyset}$

donc $X^{-1}(F) \in \mathcal{A}$.



Déf. 6) [Déjà bien sûr P_X est définie de la tribu $\mathcal{P}(X(\Omega))$ à valeurs dans $[0,1]$

Puis $P_X(X(\Omega)) = P(\underbrace{X \in X(\Omega)}_{= \text{évènement certain } X(\Omega)})$

$= 1$

Supposons maintenant $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'élts 2 à 2 disjoints de $X(\Omega)$ alors

$$\mathbb{P}_X\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \mathbb{P}\left(X \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$$

$$= \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\{X \in A_n\}}_{\text{ensembles 2 à 2 disjoints}}\Big)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X \in A_n)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_X(A_n)$$ ce qui prouve la σ-additivité de $\mathbb{P}_X$.]

P 7/ [$X(\Omega)$ étant fini ou dénombrable, cela se déduit du th. 59 du chapitre sur les probabilités.]

Lois usuelles :

- loi uniforme :

Si $X(\Omega)$ est fini, de cardinal n, alors on dit que X suit la loi uniforme sur $X(\Omega)$ ssi

$$\forall x \in X(\Omega), \quad \mathbb{P}_X(\{x\}) = \frac{1}{n}. \quad (X \sim \mathcal{U}(X(\Omega)))$$

- loi de Bernoulli

X suit la loi de Bernoulli de paramètre p $\in [0,1]$ ssi $X(\Omega) = \{0,1\}$ et si $\mathbb{P}(X=1) = p$. $\quad (X \sim \mathcal{B}(p))$

- loi binomiale

On dira que X suit la loi binomiale de paramètre (n,p) $n \in \mathbb{N}^*$, $(p \in [0,1])$ ssi $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et si de plus

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \quad \mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} p q^{k-1} = p \sum_{k=0}^{+\infty} q^k = p \times \frac{1}{1-q} = 1$$

P.11/ [$\mathbb{P}(X > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k)$

$$= \sum_{k=n+1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1} = p(1-p)^n \sum_{k=0}^{+\infty} (1-p)^k$$

$$= p(1-p)^n \frac{1}{1-(1-p)} = (1-p)^n = q^n.$$]

Exercice 8 | (Feuille de TD)

⇐ Supposons que $X \sim \mathcal{G}(p)$,

et soit $(n,k) \in \mathbb{N}^2$,

alors $\mathbb{P}(X > n+k \mid X > n) = \dfrac{\mathbb{P}(X > n+k)}{\mathbb{P}(X>n)}$

$$= \frac{(1-p)^{n+k}}{(1-p)^n} = (1-p)^k = \mathbb{P}(X>k).$$

Supposons réciproquement $\forall (n,k)$, $\mathbb{P}(X > n+k \mid X>n) = \mathbb{P}(X > k)$

On a bien sûr alors $\forall (n,k)$ $\dfrac{\mathbb{P}(X > n+k)}{\mathbb{P}(X>n)} = \mathbb{P}(X > k)$

et donc $\forall (n,k)$, $\mathbb{P}(X > n+k) = \mathbb{P}(X>n)\,\mathbb{P}(X>k)$

Ainsi, en notant $q = \mathbb{P}(X>1)$ alors $(\mathbb{P}(X>n))_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison q. Bien sûr $\mathbb{P}(X>0) = 1$

et ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{P}(X>n) = q^n$

Puis, étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X=n) = \mathbb{P}(\{X>n-1\} \setminus \{X>n\})$

$$= \mathbb{P}(X>n-1) - \mathbb{P}(X>n)$$

$$= q^{n-1} - q^n = q^{n-1}(1-q)$$

$$= p \cdot q^{n-1}.$$

(q^n) étant à valeurs positives et bornée (à valeurs dans $[0,1]$) alors $q \in [0,1]$, tout comme $p = 1-q$.

On peut noter que la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(X>n+k \mid X>n)$ suppose implicitement $\mathbb{P}(X>n) > 0$. donc $q \neq 0$. et donc $p \in [0,1[$.

En fait, $p=0$ est impossible car on aurait

$\forall n$, $\mathbb{P}(X=n) = p \cdot q^{n-1} = 0$ et donc

$\mathbb{P}(X>0) = 0$ ce qui est absurde.

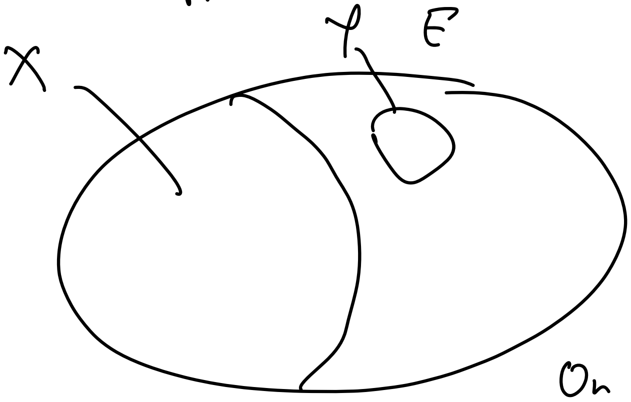
Donc $p=0$ et on reconnaît la loi géométrique de paramètre p.

Soit E fini de cardinal n.

$\mathcal{H} = \{ (X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2 \mid X \cap Y = \emptyset \}$

Cardinal de $\mathcal{H}$?

[Supposons X choisie, une partie de E de cardinal k.



alors il y a 2^{n-k} parties Y de E telles que $X \cap Y = \emptyset$
(il s'agit des parties de $\overline{X}$, or $\mathrm{Card}\,\overline{X} = n-k$)

On en déduit, par un partitionnement

que $\mathrm{Card}\,\mathcal{H} = \sum_{k=0}^{n} \{ (X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2 \mid X \cap Y = \emptyset \text{ et } \mathrm{Card}\,X = k \}$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times 2^{n-k} = (1+2)^n \quad]$$

Soit E fini de cardinal n.

Calculer $\sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \mathrm{Card}\,X$, $\sum_{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2} \mathrm{Card}\,(X \cap Y)$,

$\sum_{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2} \mathrm{Card}\,(X \cup Y)$ ...