P411 [Si $X \leq Y$,

alors $\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y-X)$ (linéarité)

≥ 0 (positivité)

Si de plus $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X)$ alors $Y - X \geq 0$ et $\mathbb{E}(Y-X) = 0$

donc $Y - X = 0$ presque sûrement.].

P.421 [On utilise ici encore la formule de transfert en notant que $Y = f((X,Y))$ où $f : \mathbb{K} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$(x,y) \mapsto y$

Alors, d'après la formule de transferts, Y admettant une espérance finie alors $\left(y\, \mathbb{P}((X,Y) = (x,y)) \right)_{(x,y) \in (X,Y)(\Omega)}$ est sommable

et $\mathbb{E}(Y) = \sum_{(x,y) \in (X,Y)(\Omega)} y\, \mathbb{P}((X,Y) = (x,y))$.

Puis $X = g((X,Y))$ où $g : (x,y) \mapsto x$ et X est, on le sait, d'espérance finie ssi $\left(x\, \mathbb{P}((X,Y) = (x,y)) \right)_{(x,y) \in (X,Y)(\Omega)}$ est sommable.

ssi $\sum_{(x,y) \in (X,Y)(\Omega)} |x|\, \mathbb{P}((X,Y) = (x,y)) < +\infty$

or $\sum_{(x,y) \in (X,Y)(\Omega)} |x|\, \mathbb{P}((X,Y) = (x,y)) \leq \underbrace{\sum_{(x,y) \in (X,Y)(\Omega)} y\, \mathbb{P}((X,Y) = (x,y))}_{< +\infty}$

Ainsi X est donc bien d'espérance finie et, de plus :

$$|\mathbb{E}(X)| = \left| \sum_{(x,y) \in (X,Y)(\Omega)} x\, \mathbb{P}((X,Y) = (x,y)) \right|$$

$$\leq \sum_{(x,y) \in (X,Y)(\Omega)} |x|\, \mathbb{P}((X,Y) = (x,y))$$

$$\leq \mathbb{E}(Y).\ ]$$

P.43 | [Ici encore, la formule de Transfert intervient

en posant $f : \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}$

$(x,y) \longmapsto x \times y$

Ainsi XY est d'espérance finie ssi $\left(xy \ \mathbb{P}((X,Y)=(x,y))\right)_{(x,y)\in(X,Y)(\Omega)}$ est sommable.

or, X et Y étant supposées indépendantes,

$\forall (x,y) \in (X,Y)(\Omega), \quad \mathbb{P}((X,Y)=(x,y)) = \mathbb{P}(X=x) \times \mathbb{P}(Y=y)$

Mais alors

$$\sum_{(x,y)\in(X,Y)(\Omega)} |xy| \ \mathbb{P}((X,Y)=(x,y))$$

$$= \sum_{(x,y)\in(X,Y)(\Omega)} |x| \ \mathbb{P}(X=x) \times |y| \ \mathbb{P}(Y=y)$$

$(X,Y)(\Omega) = X(\Omega) \times Y(\Omega)$ car X et Y sont indépendantes

$$= \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} \text{''} \times \text{''}$$

$$= \underbrace{\left(\sum_{x\in X(\Omega)} |x| \ \mathbb{P}(X=x)\right)}_{<+\infty} \underbrace{\left(\sum_{y\in Y(\Omega)} |y| \ \mathbb{P}(Y=y)\right)}_{<+\infty}$$

(X et Y sont d'espérance finie)

Ainsi XY est bien d'espérance finie

et $$\mathbb{E}(XY) = \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xy \ \mathbb{P}((X,Y)=(x,y))$$

$$= \left(\sum_{x\in X(\Omega)} x \ \mathbb{P}(X=x)\right)\left(\sum_{y\in Y(\Omega)} y \ \mathbb{P}(Y=y)\right)$$

$$= \mathbb{E}(X) \ \mathbb{E}(Y). \quad]$$

Thm 44 (Markov)

[On sait que $\mathbb{E}(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} x \ \mathbb{P}(X=x)$

$$= \underbrace{\sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ x<a}} x \ \mathbb{P}(X=x)}_{\geqslant 0} + \underbrace{\sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ x\geqslant a}} x \ \mathbb{P}(X=x)}_{\geqslant \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ x\geqslant a}} a \ \mathbb{P}(X=x)}$$

donc $\mathbb{E}(X) \geqslant a \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \geqslant a}} \mathbb{P}(X = x)$

$\geqslant a \, \mathbb{P}(X \geqslant a)$

car $\{X \geqslant a\} = \bigcup_{x \geqslant a} \{X = x\}$]

P.45) [$|X| \leqslant X^2 + 1$ or X^2 et 1 sont d'espérance finie, donc X^2+1 aussi et X l'est à son tour (P.42).]

D.47) [$\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2 - 2X\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2)$

$= \mathbb{E}(X^2) - 2\,\mathbb{E}(X)^2 + \mathbb{E}(X)^2$ par linéarité

$= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$.]

Révisions :

Si $X \sim \mathcal{B}(p)$, alors $X^2 = X$ donc

$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = p - p^2 = p(1-p)$.

Si $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$,

$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=1}^{n} k^2 \times \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

ainsi $V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = -\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 + \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$

$= \frac{n+1}{2}\left[\frac{2n+1}{3} - \frac{n+1}{2}\right]$

$= \frac{n+1}{2}\left(\frac{n-1}{6}\right) = \frac{n^2-1}{12}$.

Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ alors

$k(k-1)\binom{n}{k} = (k-1)n\binom{n-1}{k-1} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$

$\mathbb{E}(X(X-1)) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\,\mathbb{P}(X = k)$

$= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

$= \sum_{k=2}^{n} n(n-1)\binom{n-2}{k-2} p^k (1-p)^{n-k}$

$= n(n-1)p^2 \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} p^{k-2} (1-p)^{n-2-(k-2)}}_{(p+1-p)^{n-2}}$

$= n(n-1)p^2.$

Ainsi $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2$

$= n(n-1)p^2 + np - (np)^2$

$= np[(n-1)p + 1 - np]$

$= np(1-p).$]

P.49 [On suppose que $X \sim \mathcal{G}(p)$ (où $p \in]0,1[$)

on rappelle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}(X=n) = p(1-p)^{n-1}.$

Mais alors $\sum_{n\geq 1} n^2 p(1-p)^{n-1}$ est convergente en vertu de la règle de d'Alembert car $\frac{(n+1)^2 p(1-p)^{n-1}}{n^2 p(1-p)} = \left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)(1-p) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1-p \in [0,1[$

(ainsi $\sum n^2 p(1-p)^{n-1}$ converge absolument)

donc X^2 est bien d'espérance finie et X admet bien une variance.

Puis $\mathbb{E}(X(X-1)) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)\,p(1-p)^{n-1}.$

or $\forall x \in]-1,1[, \ \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{2}{(1-x)^3}$

donc $\mathbb{E}(X(X-1)) = p(1-p)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)(1-p)^{n-2}$

$= p(1-p)\frac{2}{(1-(1-p))^3} = \frac{2(1-p)}{p^2}$

Ainsi

$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2$

$= \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{2(1-p)+p-1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$

Supposons maintenant que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

on rappelle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \ \mathbb{P}(X=n) = \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}.$

$\sum_{n\in\mathbb{N}} n^2 \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$ est encore convergente en vertu de la règle de d'Alembert. $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \to 0 \ldots\right)$

donc X admet bien un moment d'ordre 2 et donc aussi une variance.

$$\mathbb{E}(X(X-1)) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} = \lambda^2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!}e^{-\lambda} = \lambda^2$$

Ainsi: $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2$

$= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$.]

P.50] [$(aX+b)^2 = a^2X^2 + 2abX + b^2$ est d'espérance finie,

donc $aX+b$ admet une variance et

$$\mathbb{V}(aX+b) = a^2\,\mathbb{E}(X^2) + 2ab\,\mathbb{E}(X) + b^2 - (a\,\mathbb{E}(X)+b)^2$$

$$= a^2(\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2) + 0.\ ]$$

Exo 6 [Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, alors $aX+b$ est centrée réduite

ssi $\begin{cases} \mathbb{E}(aX+b)\ (= a\,\mathbb{E}(X)+b) = 0 \\ \mathbb{V}(aX+b)\ (= a^2\,\mathbb{V}(X)) = 1 \end{cases}$

ssi $\begin{cases} a^2 = \dfrac{1}{\mathbb{V}(X)} \\ a\,\mathbb{E}(X) + b = 0 \end{cases}$

Ssi $(a,b) = \left(\dfrac{1}{\sigma(X)}, -\dfrac{\mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}\right)$

(ainsi $\dfrac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite).]

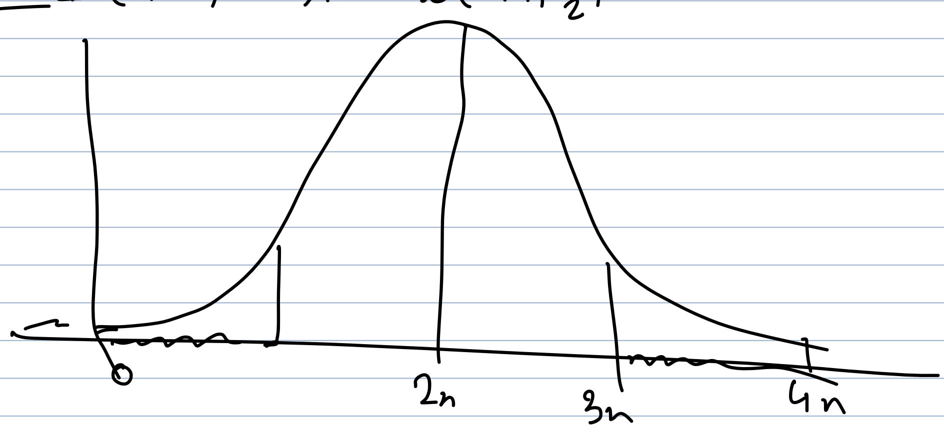
P.51] [On pose $Y = (X - \mathbb{E}(X))^2$ alors Y est à valeurs positives donc d'après l'inégalité de Markov:

$$\mathbb{P}(Y \geq \alpha^2) \leq \frac{\mathbb{E}(Y)}{\alpha^2}$$

or $\{Y \geq \alpha^2\} = \{|X - \mathbb{E}(X)| \geq \alpha\}$

et $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{V}(X)$.]

Exercice 1 (TD) $X \sim \mathcal{B}(4n, \frac{1}{2})$



1. X est à valeurs positives et $\mathbb{E}(X) = 4n \times \frac{1}{2} = 2n$.

$3n > 0$ donc d'après l'inégalité de Markov :

$$\mathbb{P}(X \geqslant 3n) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{3n}$$
$$\leqslant \frac{2}{3}$$

2. D'après l'inégalité de Bienaymé – Tchebychev :

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant n) \leqslant \frac{4n \times \frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})}{n^2}$$
$$\leqslant \frac{1}{n}.$$

De plus, $\{|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant n\} = \{X \geqslant 3n\} \cup \{X \leqslant n\}$

donc, par symétrie : $\mathbb{P}(X \geqslant 3n) \leqslant \frac{1}{2n}$.

3. On calcule $\mathbb{E}(2^X)$:

$$\mathbb{E}(2^X) = \sum_{k=0}^{4n} 2^k \, \mathbb{P}(X = k)$$
$$= \sum_{k=0}^{4n} 2^k \binom{4n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{4n-k}$$
$$= \sum_{k=0}^{4n} \binom{4n}{k} 2^{k-4n} = \frac{1}{2^{4n}} (2+1)^{4n}$$
$$= \left(\frac{3}{2}\right)^{4n}.$$

Puis, d'après l'inégalité de Markov :

$$\mathbb{P}(X \geqslant 3n) = \mathbb{P}(2^X \geqslant 2^{3n}) \leqslant \frac{\mathbb{E}(2^X)}{2^{3n}}$$
$$\leqslant \frac{3^{4n}}{2^{7n}}$$
$$\leqslant \frac{81^n}{128^n}.$$