$\operatorname{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}\big((X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y))\big) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

D.52| [On justifie que, X et Y admettant des moments d'ordre 2, alors XY est d'espérance finie.

puis $|XY| \leqslant \frac{1}{2}(X^2+Y^2)$ (car $\frac{1}{2}(X^2+Y^2) - |XY| = \frac{1}{2}(|X|-|Y|)^2$)

donc (P.42), XY est bien d'espérance finie.]

P.53| [Si X et Y sont de plus indépendantes, alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ et donc $\operatorname{Cov}(X,Y) = 0$.]

P.54| [$\operatorname{Cov}(aX+bY, Z) = \mathbb{E}((aX+bY)Z) - \mathbb{E}(aX+bY)\mathbb{E}(Z)$

$= a\,\mathbb{E}(XZ) + b\,\mathbb{E}(YZ) - a\,\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Z) - b\,\mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(Z)$

d'après la linéarité de l'espérance.

$= a\operatorname{Cov}(X,Z) + b\operatorname{Cov}(Y,Z)$.

Les autres propriétés sont toutes aussi immédiates.]

P.55| [On note δ la fonction d'une variable réelle définie par

$\forall t \in \mathbb{R},\ \delta(t) = \operatorname{Cov}(tX+Y, tX+Y) = \mathbb{V}(tX+Y)$.

Bien sûr, $\forall t \in \mathbb{R},\ \delta(t) \geqslant 0$

et $\forall t \in \mathbb{R},\ \delta(t) = t^2\operatorname{Cov}(X,X) + 2t\operatorname{Cov}(X,Y) + \operatorname{Cov}(Y,Y)$

(bilinéarité + symétrie)

* Si $\operatorname{Cov}(X,X) = 0$ alors δ est une fonction affine, à valeurs positives sur $\mathbb{R}$, et donc une fonction constante.

Ainsi $\operatorname{Cov}(X,Y) = 0$ ce qui justifie, dans ce cas, l'inégalité souhaitée.

* Si $\operatorname{Cov}(X,X) \neq 0$, δ est une fonction trinomiale du second degré, à valeurs positives sur $\mathbb{R}$ donc de discriminant au plus nul.

On a donc $4\left(\operatorname{Cov}(X,Y)^2 - \operatorname{Cov}(X,X)\operatorname{Cov}(Y,Y)\right) \leqslant 0$

ce qui établit $\operatorname{Cov}(X,Y)^2 \leqslant \mathbb{V}(X)\,\mathbb{V}(Y)$.]

Remarque : Si X et Y sont des variables aléatoires discrètes réelles de variances non nulles, on introduit le coefficient de corrélation linéaire de X et Y :

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)}}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\rho(X,Y) \in [-1,1]$

Exercice : Avec les notations précédents, on suppose que $|\rho(X,Y)| = 1$

Montrer qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tq l'évènement $Y = aX+b$ soit presque sûr.

[Par hypothèse $Cov(X,Y)^2 = \mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)$

en reprenant la démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

alors $\varphi : t \mapsto Cov(tX+Y, tX+Y)$ est de discriminant nul

donc admet une unique racine réelle. Notons $-a$ celle-ci

alors $\mathbb{V}(-aX+Y) = 0$

ce qui indique que $-aX+Y = \mathbb{E}(-aX+Y)$ presque sûrement.

On pose $b = \mathbb{E}(-aX+Y)$ et on a donc bien

$Y = aX+b$ presque sûrement.

Remarque : On a alors $Cov(X,Y) = \underbrace{a\,Cov(X,X)}_{\text{du signe de } a.} + \underbrace{Cov(X,b)}_{=0}$

]

56) [$\mathbb{V}(X_1+\dots+X_n) = Cov(X_1+\dots+X_n, X_1+\dots+X_n)$

$= \sum_{(i,j)} Cov(X_i, X_j)$]

Application : Si on répète n épreuves de Bernoulli, indépendantes, de même paramètre p, qu'on nomme X_i la variable aléatoire valant 1 si la i-ème épreuve est un succès, et 0 sinon, et qu'on pose $X = X_1+\dots+X_n$ alors $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, $\forall i, X_i \sim \mathcal{B}(p)$.

les v.a. X_i sont indépendantes (et aussi 2 à 2 indépendantes)

et donc $\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(X_1)+\dots+\mathbb{V}(X_n) = p(1-p)+\dots+p(1-p)$

$= np(1-p)$.

Ex. 59) Si $X \sim \mathcal{U}([\![1,n]\!])$, $G_X(t) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X=k)t^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{t^k}{n}$

$\underset{t\neq 1}{=} \frac{1}{n}\,\frac{t^{n+1}-t}{t-1}$ $(= 1 \text{ si } t=1)$

Si $X \sim \mathcal{B}(p)$: $G_X(t) = (1-p) \times t^0 + p \times t^1$

Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$: $G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} t^k$

$$= (tp + 1 - p)^n. \quad]$$

P.60| Si $X \sim \mathcal{G}(p)$:

$$G_X(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)\, t^n = \sum_{n=1}^{+\infty} p(1-p)^{n-1} t^n$$

$$= pt \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} ((1-p)t)^{n-1}}_{\text{cette série converge ssi } |(1-p)t| < 1}$$

$$= \frac{pt}{1-(1-p)t}$$

Remarque : le rayon de convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)\, t^n$ vaut $\frac{1}{1-p}$ (>1)

Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)\, t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} t^n$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = e^{-\lambda + \lambda t}$$

$$= e^{\lambda(t-1)}.$$

Remarque : Ici, le rayon de convergence de $\sum \mathbb{P}(X=n)\, t^n$ vaut $+\infty$.

P.61| [Supposons que X soit d'espérance finie.

alors la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} n\, \mathbb{P}(X=n)$ est convergente

or on sait bien que G_X dérivable sur $]-1,1[$ (et même C^∞)

et que $\forall x \in]-1,1[$, $G_X'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)\, n\, t^{n-1}$.

En posant pour tout n, $f_n = t \mapsto \mathbb{P}(X=n)\, n\, t^{n-1}$

alors f_n est bornée sur $[0,1]$ et $\|f_n\|_\infty = \mathbb{P}(X=n) \times n$.

et on sait alors que $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.

Pour une raison analogue, $\sum \mathbb{P}(X=n)t^n$ est normalement convergente sur $[0,1]$.

De ce fait, G_X est alors de classe C^1 sur $[0,1]$ et

$$G_X'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\,\mathbb{P}(X=n) = \mathbb{E}(X).$$

Si réciproquement G_X est dérivable en 1,

en posant pour tout $g_n = t \mapsto \mathbb{P}(X=n)t^n$,

$\sum g_n$ converge normalement vers G_X sur $[0,1]$ et on sait G_X de classe C^∞ sur $[0,1[$ et en particulier :

$$\forall t \in [0,1[, \quad G_X'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} g'_n(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\,\mathbb{P}(X=n)t^{n-1}$$

Soit $N \geqslant 1$ fixé, alors

$$\forall t \in [0,1[, \; G_X'(t) \geqslant \sum_{n=1}^{N} n\,\mathbb{P}(X=n)t^{n-1}.$$

Par ailleurs, G'_X est croissante sur $[0,1[$ (somme de fns croissantes) donc admet une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ en 1, de plus G_X est continue sur $[0,1]$, donc d'après le thm de la limite de la dérivée, on ne peut qu'avoir $\ell = G'_X(1)$

Il vient alors, à la limite quand $t \to 1$:

$$G'_X(1) \geqslant \sum_{n=1}^{N} n\,\mathbb{P}(X=n).$$

Ainsi la série $\sum n\,\mathbb{P}(X=n)$ est convergente car à termes positifs et car sa suite des sommes partielles est majorée.

Ainsi X admet bien une espérance finie et d'après la première partie, $\mathbb{E}(X) = G'_X(1)$

[Même raisonnement pour établir que $X(X-1)$ admet une espérance finie ssi G_X est deux fois dérivable en 1 (et qu'alors $G_X''(1) = \mathbb{E}(X(X-1))$) ...]

<u>Exercice</u> : Retrouver pour $X \sim \mathcal{G}(p)$ son espérance et sa variance à l'aide de sa fonction génératrice G_X.

[On rappelle que

$$G_X(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)\, t^n = \sum_{n=1}^{+\infty} p(1-p)^{n-1} t^n = pt \times \frac{1}{1-(1-p)t}$$

$$= \frac{pt}{1-qt} \quad \text{en posant } q = 1-p$$

G_X est alors deux fois dérivable en 1 et

$$G_X(1+h) = \frac{p(1+h)}{1-q(1+h)} = \frac{p+ph}{p-qh} = \frac{1+h}{1-\frac{q}{p}h} = (1+h)\left(1+\frac{q}{p}h+\frac{q^2}{p^2}h^2+o(h^2)\right)$$

$$= 1 + \left(1+\frac{q}{p}\right)h + \left(\frac{q}{p}+\frac{q^2}{p^2}\right)h^2 + o(h^2)$$

Par identification : $G_X'(1) = 1+\frac{q}{p} = \frac{1}{p}$

$$G_X''(1) = 2\left(\frac{q}{p}+\frac{q^2}{p^2}\right) = 2\,\frac{q(p+q)}{p^2}$$

$$= 2\,\frac{q}{p^2}.$$

Ainsi $\mathbb{E}(X) = G_X'(1) = \frac{1}{p}$

$$\mathbb{E}(X(X-1)) = G_X''(1) = 2\,\frac{q}{p^2}.$$

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2$$

$$= 2\,\frac{q}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{2q+p-1}{p^2} = \frac{q}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}.$$]