

P.62 | I On rappelle que $G_X = E(t^X)$

$$G_Y = E(t^Y)$$

$$G_{X+Y} = E(t^{X+Y}) = E(t^X \cdot t^Y)$$

or X et Y sont, par hypothèse, indépendants, et ainsi:

(P.24) t^X et t^Y le sont aussi;

$$\text{et on sait qu'alors } E(t^X \cdot t^Y) = E(t^X) E(t^Y)$$

$$\text{c-à-d } G_{X+Y} = G_X \cdot G_Y. \quad]$$

Thm 63 | I

X admet une variance $\sigma^2 > 0$

$$\text{B-T : } P(|X - E(X)| \geq \alpha) \leq \frac{V(X)}{\alpha^2}$$

Soit $n \geq 1$, on pose $X = \frac{S_n}{n}$,

$$\text{alors } E(X) = \frac{1}{n} (E(X_1) + \dots + E(X_n)) = \frac{n \cdot m}{n} = m$$

$$\begin{aligned} V(X) &= \frac{1}{n^2} V(X_1 + \dots + X_n) \text{ or } X_1, \dots, X_n \text{ sont indépendantes} \\ &= \frac{1}{n^2} (V(X_1) + \dots + V(X_n)) \\ &= \frac{n \sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

Donc, d'après l'inégalité de Bienaymé - Tchebychev :

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

$$\text{c-à-d } P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n \varepsilon^2}. \quad]$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

Exo 22 | 1) On note X_n la variable aléatoire dénombrant les lancers

côté pile parmi les n premiers lancers.

$$\text{alors } X_n \sim B(n, \frac{1}{2})$$

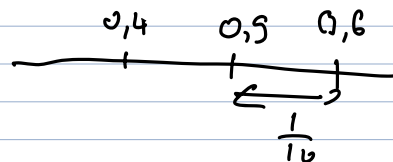
$$\text{On souhaite avoir } P\left(\left|\frac{X_n}{n} - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{10}\right) > \frac{9}{10}.$$

ou, de manière équivalente, que

$$P\left(\left|\frac{X_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{10}\right) \leq \frac{1}{10}$$

or d'après l'inégalité de Bienaymé - Tchebychev,

$$P\left(\left|\frac{X_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{10}\right) \leq \frac{V\left(\frac{X_n}{n}\right)}{1/10^2}$$



$$\leq \frac{100}{n^2} V(X_n)$$

$$\leq \frac{100}{n^2} n \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\text{Il suffit donc d'avoir } \frac{25}{n} \leq \frac{1}{10}$$

$$\text{et il suffit donc que } n \geq 250$$

Avec la loi faible des grands nombres :

on note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n la variable aléatoire à valeurs dans $\{0,1\}$ qui vaut 1 si la n -ième lancer vaut "pile", et 0 sinon.

alors $X_n \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$ et (X_n) est une suite de variables aléatoires indépendantes, donc d'après la loi faible des grands nombres : (en posant $\forall n \geq 1, S_n = \sum_{k=1}^n X_k$)

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{10}\right) &\leq \frac{V(X_1)}{n \left(\frac{1}{10}\right)^2} \\ &\leq \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right)}{n \left(\frac{1}{10}\right)^2} \\ &\leq \frac{25}{n}. \end{aligned}$$

$$\text{Puisqu'on souhaite avoir } P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{10}\right) \leq \frac{1}{10}$$

alors on retrouve qu'il suffit que $n \geq 250$. $\square$

Intégrales à paramètre 4, 8

$$\text{Exo 1. On pose } \forall x \in \mathbb{R}^+, \forall t \in \mathbb{R}^+, f(x,t) = \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}.$$

On a alors $\forall x \in \mathbb{R}^+, t \mapsto f(x,t)$ est continue ^(par morceaux) sur $\mathbb{R}^+$

$\forall t \in \mathbb{R}^+, x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^{+2}, |f(x,t)| \leq \frac{1}{1+t^2} \text{ et}$$

$t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Mais alors, g est bien définie (sur $\mathbb{R}^+$) et est de plus continue.

On a encore :

($\forall x > 0$, $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$),

$\forall t \in \mathbb{R}^+$, $x \mapsto f(x, t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$

$$\text{et } \forall x > 0, \forall t \geq 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -2x e^{-x^2(1+t^2)}$$

$\forall x > 0$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}^+$

Pour tous réels $a < b$ strictement positifs,

et $\forall x \in [a, b]$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq 2b e^{-a^2(1+t^2)}$$

$$\text{or } 2b e^{-a^2(1+t^2)} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

donc $t \mapsto 2b e^{-a^2(1+t^2)}$ est intégrable en $+\infty$ (et continue sur $\mathbb{R}^+$, donc intégrable sur $\mathbb{R}^+$).

D'après le thm de dérivation de l'intégrale à paramètres, g est alors de classe C^1 sur $[a, b]$, puis sur $\bigcup_{a < b} [a, b] = \mathbb{R}^{+*}$

$$\text{et } \forall x > 0, g'(x) = \int_0^{+\infty} -2x e^{-x^2(1+t^2)} dt$$

2. Soit $x > 0$, $t \mapsto xt$ réalise une bijection C^1 strictement croissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ et donc, en posant $u = xt$,

$$g'(x) = \int_0^{+\infty} -2 e^{-x^2 - u^2} du = -2 e^{-x^2} \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du}_{= I}$$

3. g est continue sur $\mathbb{R}^+$, dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$

$$\text{et } \forall x > 0, g'(x) = -2I e^{-x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -2I$$

donc d'après le thm de la limite de la dérivée g est dérivable en 0 et $g'(0) = -2I$. Bien sûr, g' est alors continue en 0 et g est bien de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$.

$$4. \quad g(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \left[\arctan t \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

Limite en $+\infty$:

$$\text{On rappelle que } \forall (n, t) \in (\mathbb{R}^+)^2, \quad |f(n, t)| = \left| \frac{e^{-n^2(1+t^2)}}{1+t^2} \right| \leq \frac{1}{1+t^2}$$

et que $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

$$\text{or } \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad f(n, t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Mais alors, d'après le thm de convergence dominée à paramètres continus,

$$g(n) = \int_0^{+\infty} f(n, t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} 0 dt = 0$$

5. g étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ alors,

$$\begin{aligned} \forall n > 0, \quad g(n) - g(0) &= \int_0^n g'(t) dt = \int_0^n -2I e^{-t^2} dt \\ &= -2I \int_0^n e^{-t^2} dt \end{aligned}$$

$$\text{donc } g(n) = \underbrace{g(0)}_{=\frac{\pi}{2}} - 2I \int_0^n e^{-t^2} dt.$$

À la limite quand $n \rightarrow +\infty$:

$$0 = \frac{\pi}{2} - 2I^2 \quad \text{donc } I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Exo 81

$$\forall n \geq 0, \quad f(n) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(n^2+t^2)}{1+t^2} dt$$

On voit que f est bien définie, continue sur $\mathbb{R}^+$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{++}$. On calculera, $\forall n > 0, f'(n)$.

$$\text{On pose } \forall a \geq 0, \forall t \geq 0, \quad g(n, t) = \frac{\ln(n^2+t^2)}{1+t^2}.$$

- $\forall n \geq 0, t \mapsto g(n, t)$ est continue sur $\mathbb{R}^{++}$.

- $\forall t > 0, n \mapsto g(n, t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

- Étant donné $a > 0$,

$$\forall n \in [0, a], \forall t > 0, \quad |g(n, t)| \leq \overbrace{\frac{|\ln(a^2+t^2)| + |\ln t^2|}{1+t^2}}^{\varphi(t)}$$

φ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et

$$\varphi(t) = o\left(\frac{1}{t^{1/2}}\right) \text{ or } t \mapsto \frac{1}{t^{3/2}} \text{ est intégrable en } +\infty$$

$$\varphi(t) \sim 2|\ln t| \text{ et } t \mapsto 2|\ln t| \text{ est intégrable en } 0$$

ainsi φ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$

et d'après le th de continuité des intégrales à paramètre,
 f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

De plus, $\forall t \in \mathbb{R}^+, n \mapsto g(n, t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$

$$\text{et } \forall n > 0, \forall t \geq 0, \frac{\partial g}{\partial n}(n, t) = \frac{2n}{n^2 + t^2} \times \frac{1}{1 + t^2}.$$

- $\forall n > 0, t \mapsto \frac{\partial g}{\partial n}(n, t)$ est continue (par morceaux)

- Étant données $a < b$ des réels strictement positifs, alors

$$\forall (n, t) \in [a, b] \times \mathbb{R}^+, \left| \frac{\partial g}{\partial n}(n, t) \right| \leq \frac{2b}{a^2 + t^2} \times \frac{1}{1 + t^2}.$$

Bien sûr $t \mapsto \frac{2b}{a^2 + t^2} \times \frac{1}{1 + t^2}$ est continue et intégrable
sur $\mathbb{R}^+$ ($= o\left(\frac{1}{t^2}\right)$)

et ainsi f est bien de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ ($= \bigcup_{0 < a < b} [a, b]$)

$$\text{et } \forall n > 0, f'(n) = \int_0^{+\infty} \frac{2n}{(n^2 + t^2)(1 + t^2)} dt$$

On cherche alors des réels a, b, a', b' tq

$$\forall t, \frac{2n}{(n^2 + t^2)(1 + t^2)} = \frac{a + bt}{1 + t^2} + \frac{a' + b't}{n^2 + t^2}.$$

$$\text{Il vient : } b = b' = 0 \text{ puis } a = \frac{2n}{n^2 - 1} \text{ et } a' = \frac{-2n}{n^2 - 1}.$$

$$\text{et donc } f'(n) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{2n}{(n^2 - 1)(1 + t^2)} - \frac{2n}{(n^2 - 1)(n^2 + t^2)} \right) dt$$

$$= \frac{2n}{n^2 - 1} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n} \frac{\pi}{2} \right] = \frac{2}{n+1} \times \frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{\pi}{n+1}}$$

$$\left(\forall a \neq 0, \int \frac{dt}{a^2 + t^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{t}{a} \right)$$

N.B.: Du th de la limite de la dérivée on déduit que f est aussi dérivable en 0 et que $f'(0) = \frac{\pi}{0+1} = \pi$.

f' est alors bien sûr continue en 0 (donc f est C^1 sur $\mathbb{R}^+$).

Enfin: $\forall x, f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt = f(0) + \pi \ln(1+x).$

Calcul de $f(0)$ $\left(= \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t^2)}{1+t^2} dt \right)$

V.A : 13, 9

$t \mapsto \frac{1}{t}$ réalise une bijection C^1 strictement décroissante de $]0, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$, donc, en posant $u = \frac{1}{t}$, on a $du = -\frac{1}{t^2} dt$

$$\text{et } f(0) = - \int_0^{+\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{u^2}\right)}{1+\frac{1}{u^2}} \cdot \left(-\frac{du}{u^2}\right) = - \int_0^{+\infty} \frac{\ln(u^2)}{u^2+1} du$$

$$= -f(0) \quad \text{et ainsi } f(0) = 0$$

Donc $\boxed{\forall x, f(x) = \pi \ln(1+x)}$.

13) V.A.

$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{G}(p)$ indptes

$$P(X=Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=Y=k) \stackrel{\text{indépendance}}{=} \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k) P(Y=k)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$= \frac{p}{1-p} e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^k}{k!}$$

$$= \frac{p}{1-p} e^{-\lambda} \left[e^{\lambda(1-p)} - 1 \right] = \frac{p}{1-p} \left(e^{-p\lambda} - e^{-\lambda} \right)$$

9 a) la loi conditionnelle de Y sachant $X=n$ est la loi binomiale

$B(n, \frac{1}{12})$. Ceci exprime que $\forall k \in [0, n]$,

b) $(X=n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un $P_{X=n}(Y=k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{12}\right)^k \left(1 - \frac{1}{12}\right)^{n-k}$

système complet d'événements.

Donc par la formule des probabilités totales :

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(Y=k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_{X=n}(Y=k) P(X=n)$$

$$= \sum_{n=R}^{+\infty} P_{X=n}(Y=R) P(X=n)$$

$$= \sum_{n=R}^{+\infty} \binom{n}{R} \left(\frac{1}{12}\right)^R \left(\frac{11}{12}\right)^{n-R} \times \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$