P.6) [Montrons par exemple que $f\times g$ est de classe C^1.

Soit $(x_1,\dots,x_p)\in U$ et $i\in [\![1,p]\!]$,

$x\mapsto f(x_1,\dots,x_{i-1},x,x_{i+1},\dots,x_p)$ et $x\mapsto g(x_1,\dots,x_{i-1},x,x_{i+1},\dots,x_p)$

sont définies au voisinage de x_i et toutes deux dérivables en x_i.

Leur produit l'est donc encore, ce qui montre que $\frac{\partial(f\times g)}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_p)$ existe, et de plus on sait que

$$\frac{\partial(f\times g)}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_p)=\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_p)\times g(x_1,\dots,x_p)+f(x_1,\dots,x_p)\frac{\partial g}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_p)$$

$f\times g$ admet donc des dérivées partielles sur U.

La continuité de celles-ci résulte des thm généraux sur les limites et continuité (cf EVN).

Ainsi $f\times g$ est donc bien de classe C^1.]

Exercice 11

[1 D'après les thm généraux, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ et, $\forall (x,y)\neq(0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2}-\frac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{2y^2x}{(x^2+y^2)^2}$$

2. $\forall x\neq 0$, $f(x,0)=0$ et $f(0,0)=0$

ainsi $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et vaut 0

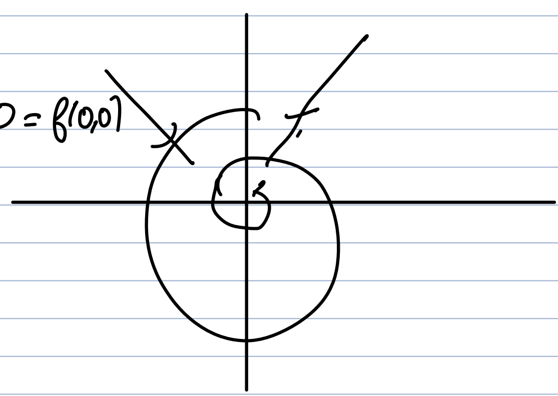
De même, $\forall y\neq 0$, $f(0,y)=0$ et $f(0,0)=0$

donc $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existe et vaut 0.

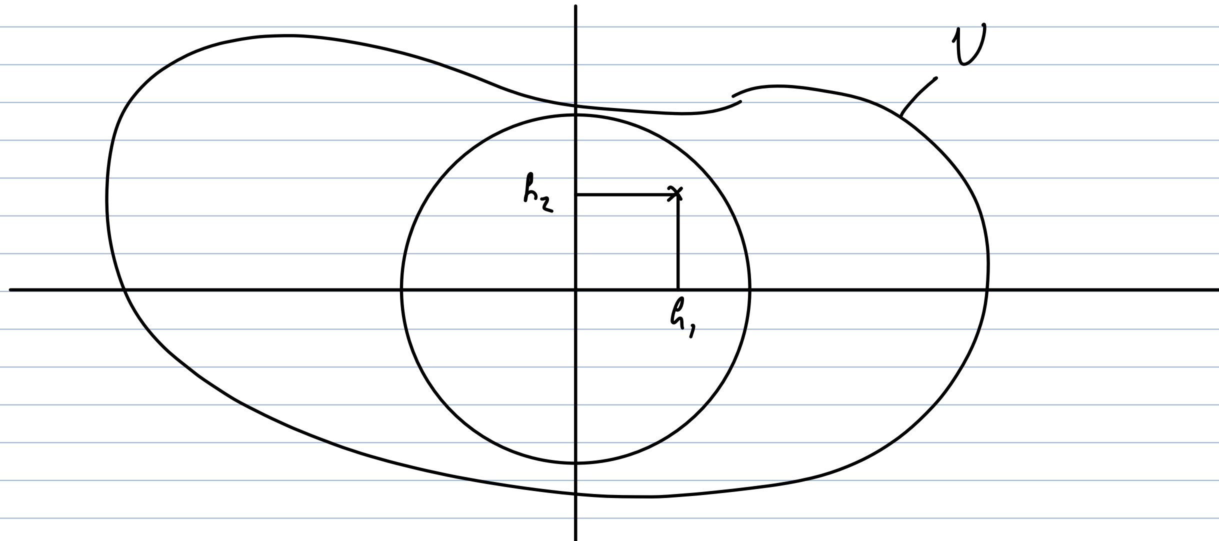
3. $\forall x\neq 0$,

$$f(x,x)=\frac{1}{2}\ \cancel{\underset{x\to 0}{\longrightarrow}}\ 0=f(0,0)$$

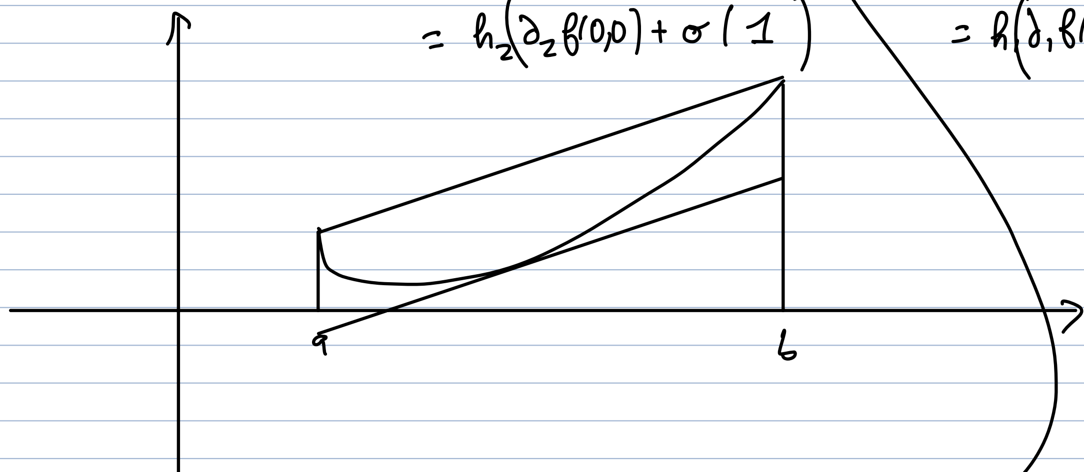
donc f n'est PAS continue en $(0,0)$]



Th 91 [$p=2$, $a=(0,0)$



$$f(h_1,h_2)-f(0,0)=\underbrace{f(h_1,h_2)-f(h_1,0)}_{\substack{\simeq h_2\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0)\\ = h_2\left(\partial_2 f(0,0)+o(1)\right)}}+\underbrace{f(h_1,0)-f(0,0)}_{\substack{\simeq h_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0)\\ = h_1\left(\partial_1 f(0,0)+o(1)\right)}}$$



On pose $\forall t\in[0,1]$, $\varphi(t)=f(h_1, t h_2)$

φ est alors de classe C^1 sur $[0,1]$,

et $\forall t\in[0,1]$, $\varphi'(t)=h_2\,\partial_2 f(h_1, t h_2)$

φ est donc bien continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$

à valeurs réelles donc d'après le thm des AF :

il existe $c\in\,]0,1[$ tq $\dfrac{\varphi(1)-\varphi(0)}{1-0}=\varphi'(c)$

c-à-d : $f(h_1,h_2)-f(h_1,0)=h_2\underbrace{\partial_2 f(h_1, c h_2)}_{=\partial_2 f(0,0)+\underset{h\to 0}{o}(1)}$

ainsi $f(h_1,h_2)-f(0,0)=h_2\,\partial_2 f(0,0)+h_1\,\partial_1 f(0,0)+\underbrace{h_2\,o(1)+h_1\,o(1)}_{o(\|h\|)}$]

Corollaire 10 | [Soit $f : U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ de classe C^1

$a \in U$ et $h \in \mathbb{R}^p$.

On pose $\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto f(a+th)$ que l'on sait définie au voisinage de 0.

On sait de plus qu'il existe $\varepsilon : V \to \mathbb{R}$ (où $V = \{x-a \mid x \in U\}$) de limite nulle en 0 tq

$$\forall \underset{=(h_1,\dots,h_p)}{h} \in V, \quad f(a+h) = f(a) + h_1 \partial_1 f(a) + \dots + h_p \partial_p f(a) + \|h\| \varepsilon(h)$$

(Remarque : $a+h \in U$ ssi $h \in V$.).

Mais alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$ tq $th \in V$

$$\varphi(t) = f(a+th) = f(a) + t(h_1 \partial_1 f(a) + \dots + h_p \partial_p f(a)) + \underbrace{|t| . \|h\| \overbrace{\varepsilon(th)}^{\to 0}}_{\underset{t \to 0}{o}(t)}$$

Mais alors φ admet en 0 un développement limité à l'ordre 1

donc elle est dérivable en 0 et $\varphi'(0) = h_1 \partial_1 f(a) + \dots + h_p \partial_p f(a)$.

En d'autres termes f est dérivable en a selon h et

$$D_h f(a) = h_1 \partial_1 f(a) + \dots + h_p \partial_p f(a). \quad]$$

$$f(a+h) = f(a) + df(a).h + o(\|h\|)$$

Thm 13 | [Soit $t \in I$,

f étant de classe C^1 alors pour tout $h \in \mathbb{R}^p$ convenable

(c.à-d tel que $\varphi(t) + h \in U$) :

$$f(\varphi(t)+h) = f(\varphi(t)) + \underbrace{df(\varphi(t)).h}_{= \partial_1 f(\varphi(t)).h_1 + \dots + \partial_p f(\varphi(t)).h_p} + o(\|h\|)$$

φ admet égalt en t un DL d'ordre 1 et pour tout $h \in \mathbb{R}$ tq $t+h \in I$:

$$\varphi(t+h) = \varphi(t) + \varphi'(t).h + o(h)$$

Mais alors

$$f(\varphi(t+h)) = f(\varphi(t) + \varphi'(t).h + o(h))$$

$$= f(\varphi(t)) + df(\varphi(t))(\varphi'(t)h + o(h)) + \underbrace{o(\|\varphi'(t)h + o(h)\|)}_{= o(h)}$$

$$= f(\varphi(t)) + (df(\varphi(t)).\varphi'(t))\, h + o(h)$$

Ainsi $f\circ\varphi$ est dérivable en t et

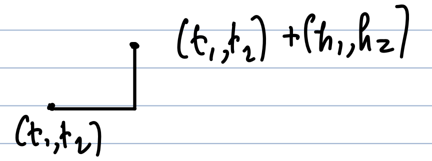
$$(f\circ\varphi)'(t) = df(\varphi(t)).\varphi'(t). \quad \blacksquare$$

Exo 2 | II $\quad g(t) = f(t^2, t)$

$t \mapsto f(x,t)$

$t \mapsto f(t,x)$

$t \mapsto f(t^2,x)$



Pas rigoureux !

$$g(t+h) = f(t^2+2ht+\cancel{h^2}, t+h)$$
$$= f(t^2,t) + 2ht\,\partial_1 f(t^2,t) + h\,\partial_2 f(t^2,t) = g(t)+hg'(t)$$

$$g'(t) = \underbrace{2t}_{x_1'(t)}\, \underbrace{\partial_1 f(t^2,t)}_{\partial_1 f(\varphi(t))} + \underbrace{1}_{x_2'(t)}\times \underbrace{\partial_2 f(t^2,t)}_{\partial_2 f(\varphi(t))}$$

se déduit directement de la règle de la chaîne.

Exercices 13, 14

13. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad C^1$ $\qquad f : (x,y) \mapsto f(x,y)$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad f : (x_1,x_2) \mapsto f(x_1,x_2)$

$t \mapsto f(2t, 1+t^2)$

alors g est de classe C^1 et

$\forall t\in\mathbb{R},\ g'(t) = 2\times\partial_1 f(2t,1+t^2) + 2t\times\partial_2 f(2t,1+t^2)$ (règle de la chaîne)

14. On note ici $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ les dérivées partielles de f (plutôt que $\partial_1 f, \partial_2 f$)

(et on pourra noter $\frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial v}$ celles de g.)

$g(u,v) = f(u^2+v^2, uv)$

D'après la règle de la chaîne :

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = 2u\,\frac{\partial f}{\partial x}(u^2+v^2, uv) + v\,\frac{\partial f}{\partial y}(u^2+v^2, uv)$$

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = 2v\,\frac{\partial f}{\partial x}(u^2+v^2, uv) + u\,\frac{\partial f}{\partial y}(u^2+v^2, uv).$$

Des théorèmes généraux de continuité, on déduit que $\frac{\partial g}{\partial u}$ et $\frac{\partial g}{\partial v}$ sont continues, et g est donc bien de classe C^1.

Exo 1 | Posons, pour tout $h \neq 0$, $g(h) = \dfrac{f(h) - f(0)}{h}$ et $g(0) = f'(0)$

alors g est continue en 0 puisque f est dérivable en 0.

or, $\forall (x,y) \neq (0,0)$, $F(x,y) = g(x^2+y^2) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} g(0) = f'(0)$

Exo 2 |

1. $\forall x \neq 0$, $f(x,0) = 1$

$f(x,x) = \dfrac{3}{2}$ ce qui montre que f n'a pas de limite en $(0,0)$.

2. $\forall x \neq 0$, $f(x,0) = 0$

$f(x,x) = \dfrac{x^2}{2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

$f(0,x) = 0$, $f(x,-x) = \dfrac{x^2}{2} \to 0$.

$f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ On conjecture que f a pour limite 0 en $(0,0)$

__Méthode 1__ : Passage en coordonnées polaires : $(x,y) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$

($\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, θ un argument de $x+iy$)

alors $f(x,y) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$

$= \rho^2\cos^2\theta\sin^2\theta$

$\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$, ce qui montre que f a pour limite 0 en $(0,0)$

__Méthode 2__ :

$$|f(x,y)| = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\leq 1} \times y^2 \leq y^2$$

et ainsi $f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$

Exo 5, 6 Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ $x \mapsto \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ existe et vaut $\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) \times \left(-\frac{y}{x^2}\right)$ $(g \circ f)'(x)$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ ——————— $\dfrac{1}{x}\varphi'\left(\dfrac{y}{x}\right)$

et ainsi $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \cdots = 0$

Exo 6 | $\forall (x,y)\neq(0,0), f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}$

$\forall (x,y)\neq(0,0)$, $|f(x,y)| \leqslant |y|$ et donc $f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$

ainsi on prolong f par continuité en $(0,0)$ en posant $f(0,0)=0$.

b) f est d'après les thm généraux de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

et $\forall (x,y)\neq(0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2} - \frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2} - \frac{2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Si $x\neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,x) = \frac{1}{2}$. et $\frac{\partial f}{\partial x}$ ne saurait être continue en $(0,0)$ ξ.

Donc f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.