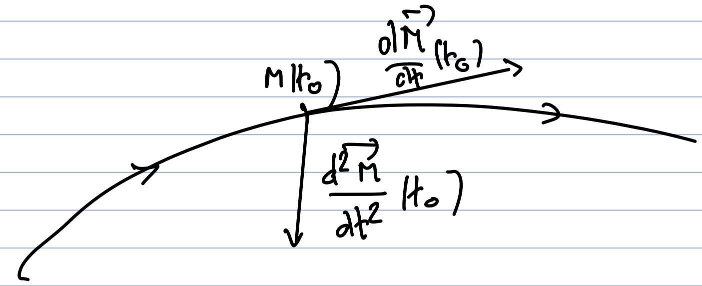
P.16] [Les composantes de $f \circ \varphi$ sont $f_1 \circ \varphi, \dots, f_n \circ \varphi$,
et celles-ci sont dérivables car f_i et φ le sont...
ainsi $f \circ \varphi$ est dérivable à son tour...]



P21] [On raisonne composante par composante]

P22] [On note $A = (a_{i,j})$ la matrice de L selon les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$, et $f_1, \dots, f_n$ les composantes de f.

Alors les composantes de $L \circ f$ sont

pour $1 \leqslant i \leqslant m$: $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} f_j$

Elles sont toutes de classe C^k d'après les thm généraux et $L \circ f$ l'est donc aussi, de plus, étant donné $p \in [\![0, k]\!]$, les composantes de $(L \circ f)^{(p)}$ sont :

$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} f_j^{(p)}$ et ainsi on reconnaît que

$$(L \circ f)^{(p)} = L \circ f^{(p)}$$]

P.23] [On procède par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$.

Supposons f et g de classe C^1, alors on a déjà vu que $B(f,g)$ est dérivable et que $\forall t \in I$, $B(f,g)'(t) = B(f'(t), g(t)) + B(f(t), g'(t))$

De plus, f, f', g, g' sont continues et on en déduit que $t \mapsto B(f'(t), g(t))$ et $t \mapsto B(f(t), g'(t))$ sont à leur tour continues (car combinaisons linéaires de fonctions continues)

et ainsi $B(f,g)$ est de classe C^1 ce qui initialise la récurrence.

Soit maintenant $k \in \mathbb{N}^*$, on suppose acquis que si f et g

sont de classe C^k alors $B(f,g)$ aussi et

$$\forall p \in [\![0,k]\!], \quad B(f,g)^{(p)} = \sum_{q=0}^{p} \binom{p}{q} B(f^{(q)}, g^{(p-q)})$$

Supposons alors $f,g : I \to \mathbb{R}^n$ de classe C^{k+1}

On sait alors déjà $B(f,g)$ dérivable et

$$B(f,g)' = B(f',g) + B(f,g')$$

de plus, f',g,f,g' sont toutes de classe C^k donc $B(f',g)$, $B(f,g')$ le sont à leur tour ce qui montre que $B(f,g)$ est de classe C^{k+1}.

On connaît déjà, d'après l'hypothèse de récurrence, les expressions de $B(f,g)^{(p)}$ pour $0 \leqslant p \leqslant k$.

et enfin :

$$B(f,g)^{(k+1)} = B(f',g)^{(k)} + B(f,g')^{(k)}$$

$$= \sum_{q=0}^{k} \binom{k}{q} B(f^{(q+1)}, g^{(k-q)}) + \sum_{q=0}^{k} \binom{k}{q} B(f^{(q)}, g^{(k+1-q)})$$

$$= \sum_{0 \leqslant q-1 \leqslant k} \binom{k}{q-1} B(f^{(q)}, g^{(k+1-q)}) + \sum_{0 \leqslant q \leqslant k} \binom{k}{q} B(f^{(q)}, g^{(k+1-q)})$$

$$= \underbrace{\binom{k}{k+1-1}}_{=1=\binom{k+1}{k+1}} B(f^{(k+1)}, g^{(0)}) + \sum_{1 \leqslant q \leqslant k} \underbrace{\left[\binom{k}{q-1} + \binom{k}{q}\right]}_{\binom{k+1}{q}} B(f^{(q)}, g^{(k+1-q)}) + \underbrace{\binom{k}{0}}_{=1=\binom{k+1}{0}} B(f^{(0)}, g^{(k+1)})$$

$$= \sum_{0 \leqslant q \leqslant k+1} \binom{k+1}{q} B(f^{(q)}, g^{(k+1-q)})$$

ce qui achève la récurrence.]

P.24 [Se déduit des thm généraux de dérivabilité en raisonnant composante par composante.]

(H) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ est dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = 2f(x)$

(C) $\forall x$, $f(x) = x\, f(1)$

ℭ $f(0) = 2f(0)$ donc $f(0) = 0$

on observe que $\forall x, f(x) = 2f\left(\frac{x}{2}\right)$

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = 2f\left(\frac{x}{4}\right) \ldots$$

et ainsi on établit par récurrence que

$$\forall x \neq 0, \forall n \quad f(x) = 2^n f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{1}{2^n}} = \underbrace{\frac{f\left(\frac{x}{2^n}\right) - f(0)}{\frac{x}{2^n}}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} f'(0)} \times x$$

donc $\boxed{f(x) = f'(0).x}$

Ainsi, $\forall x, f(x) = f'(0)\,x \quad (= f(1)\,x)$ ⅅ

<u>Exo 31</u> La dérivabilité de D_n ne fait aucun doute

(tous les coefficients de la matrice dont D_n est le déterminant sont des fns dérivables) et

$$\forall x,\ D'_n(x) = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x & x & \ddots & \ddots & \vdots \\ x^2/2 & x^2/2 & & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & 1 \\ \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} & \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} & & & x \end{vmatrix}}_{=0} + \underbrace{\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x^2/2 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ x^3/3! & x & x & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 1 \\ x^n/n! & \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} & \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} & & x \end{vmatrix}}_{=0}$$

$$\underbrace{+ \cdots}_{=0} + \underbrace{\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x^2/2 & x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 1 & 0 \\ & & & x & 0 \\ x^n/n! & \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} & & x^2/2 & 1 \end{vmatrix}}_{=D_{n-1}(x) \text{ par un dev. selon la dernière colonne.}}$$

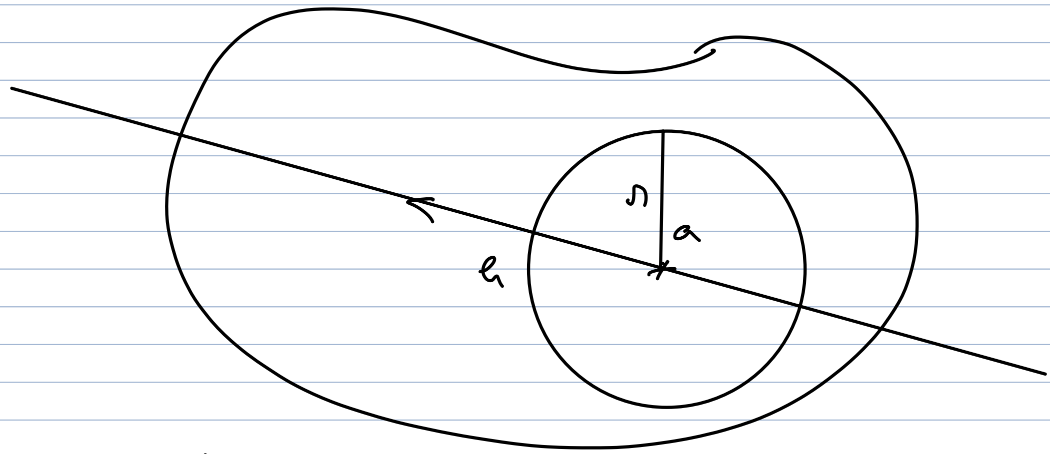
Ainsi $\forall x, D'_n(x) = D_{n-1}(x)$.

or $D_1(x) = x$, $D_2(x) = \begin{vmatrix} x & 1 \\ \frac{x^2}{2} & x \end{vmatrix} = x^2 - \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}$

et ainsi on montre par récurrence que

$\forall n, \forall x, D_n(x) = \frac{x^n}{n!}$ (on n'oublie pas de remarquer que $D_n(0) = 0$ (première colonne nulle). $\rrbracket$

$U \subset \mathbb{R}^p$



<u>Lemme 1</u> / $\llbracket$ Si $h = 0$, toute valeur $\alpha > 0$ convient.

Sinon, U étant une partie ouverte de $\mathbb{R}^p$ et $a \in U$, alors il existe $r > 0$ tq $B(a, r) \subset U$. (la norme choisie ici est la norme euclidienne usuelle, c-à-d la norme 2, mais cela a peu d'importance).

Mais alors en posant $\alpha = \frac{r}{\|h\|}$ il vient,

$$\forall t \in]-\alpha, \alpha[, \quad \|a + th - a\| = \|t\, h\| = |t| . \|h\| < \alpha \|h\|$$
$$< r$$

et ainsi $\forall t \in]-\alpha, \alpha[$, $a + th \in B(a, r)$ et à plus forte raison, $a + th \in U$. $\rrbracket$.

<u>Exemples</u> : $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x, y) \longmapsto xy$

Etant donné $a = (a_1, a_2)$ et $h = (h_1, h_2)$ élts de $\mathbb{R}^2$,

$\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = f(\underbrace{a + th}_{= (a_1 + th_1, a_2 + th_2)}) = (a_1 + th_1)(a_2 + th_2)$

$$= a_1 a_2 + t(a_1 h_2 + a_2 h_1) + t^2 h_1 h_2 .$$

φ est bien sûr dérivable en 0 et $\varphi'(0) = a_1 h_2 + a_2 h_1$

Ainsi f est dérivable en a selon h et $D_h f(a) = a_1 h_2 + a_2 h_1$.

Si maintenant $a = (x, y)$ et $h = (1, 0)$, on peut donc noter
$\frac{\partial f}{\partial x}(a)$ le nombre dérivé $D_h f(a)$ qui vaut y
(ou $\partial_1 f(a)$)

De même, si $a = (x, y)$ et $h = (0, 1)$, le nombre dérivé $D_h f(a)$
pourra être noté $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$ (ou $\partial_2 f(a)$) et il vaut x.

On a donc ici $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y, \ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x.$

Si on avait noté
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & x_1 x_2 \end{array}$$

alors on aurait également noté :
$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \ \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = x_2, \ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = x_1.$$

(Bien sûr, on peut toujours écrire :
$$\partial_1 f(x_1, x_2) = x_2, \ \partial_2 f(x_1, x_2) = x_1. \ ).$$