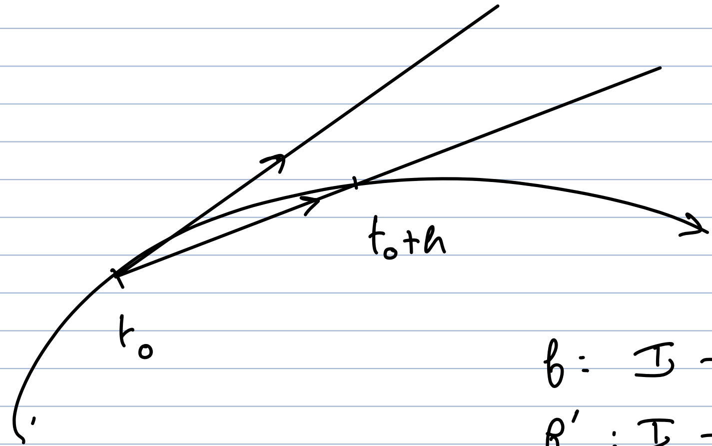


$f : I \to \mathbb{R}^n$

$f' : I \to \mathbb{R}^n$.

P3) $\boxed{\text{I}}$ La dérivabilité de f en t_0 exprime que

$\dfrac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$ admet une limite finie ℓ quand $h \underset{\neq}{\to} 0$

mais $h \mapsto \dfrac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$ a pour composantes

$$h \mapsto \frac{f_i(t_0+h)-f_i(t_0)}{h} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n$$

et ainsi f est dérivable en t_0 ssi $\forall i, f_i$ est dérivable en t_0

et, le cas échéant, $f'(t_0) = (f_1'(t_0), \dots, f_n'(t_0))$.

T.4) $\boxed{\text{I}}$ S'il existe $\ell \in \mathbb{R}^n$ et $\varepsilon : J \to \mathbb{R}^n$ de limite nulle en 0

tq $\forall h \in J,\ f(t_0+h) = f(t_0) + h.\ell + h.\varepsilon(h)$ (N.B. : $t_0+h \in I$ ssi $h \in J$)

Mais alors $\underset{\neq 0}{\forall h},\ \dfrac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h} = \ell + \varepsilon(h) \xrightarrow[h \underset{\neq}{\to} 0]{} \ell$

donc f est dérivable en t_0 et $f'(t_0) = \ell$.

Si, réciproquement, f est dérivable en t_0, alors $f_1, \dots, f_n$ le sont

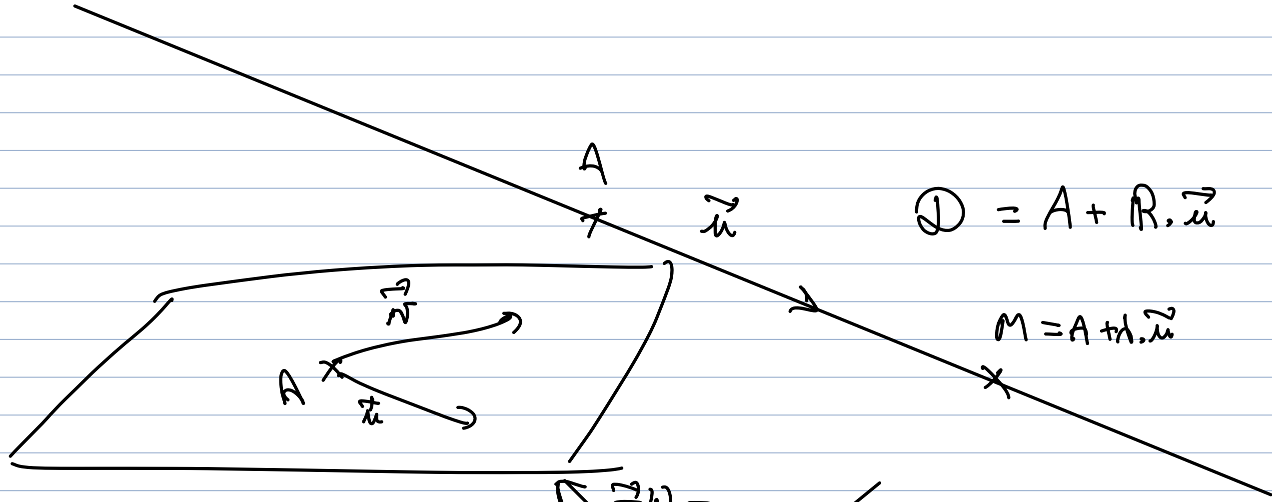
et $\forall i$, il existe $\varepsilon_i : J \to \mathbb{R}$ de limite nulle en 0

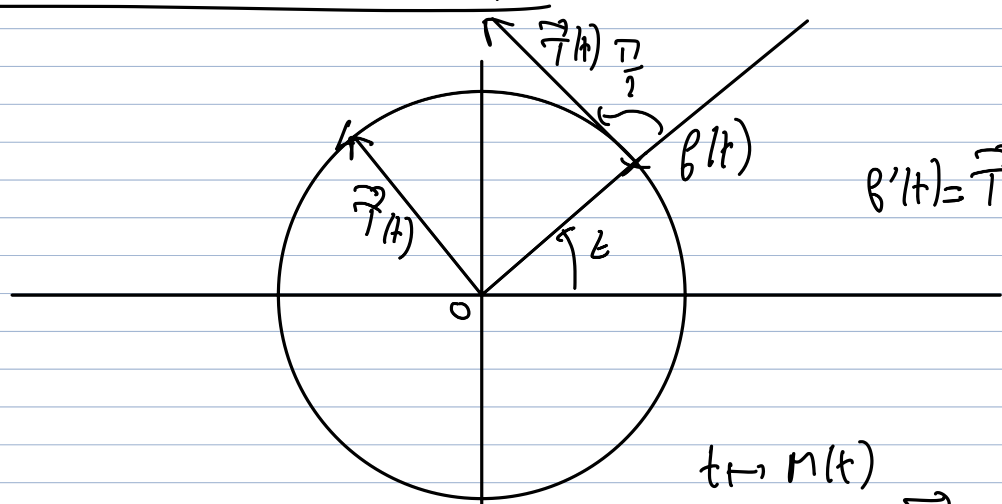
tq $\forall h \in J,\ f_i(t_0+h) = f_i(t_0) + h.f_i'(t_0) + h.\varepsilon_i(h)$

Mais alors $\forall h \in J\ f(t_0+h) = f(t_0) + h.\ell + h.\varepsilon(h)$

en notant $\ell = \begin{pmatrix} f_1'(t_0) \\ \vdots \\ f_n'(t_0) \end{pmatrix} = f'(t_0)$ et $\varepsilon(h) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1(h) \\ \vdots \\ \varepsilon_n(h) \end{pmatrix}$ et $\varepsilon(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$

$\boxed{\text{D}}$





$f'(t) = \vec{T}(t) = \left(\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right), \sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\right)$

$= (-\sin t, \cos t)$

$t \mapsto M(t)$

$\cancel{M(t)}$ $\quad \dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t)$

P.8 [Pour $\lambda.f + \mu.g$, il suffit de raisonner sur les composantes $\lambda.f_i + \mu.g_i$ qui sont dérivables en t_0 d'après les th. généraux de dérivabilité des fonctions réelles.

De même, $t \mapsto \lambda(t).f(t)$ a pour composantes $t \mapsto \lambda(t).f_i(t)$ lesquelles sont dérivables en t_0 ...]

P.10 [Posons $A = (a_{i,j}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ la matrice canoniquement associée à L, et $f_1, \dots, f_n$ les composantes de f.

On pose encore $g = L \circ f$ et on note $g_1, \dots, g_m$ les composantes de g.

Mais alors, pour $1 \leq i \leq m$, $g_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} f_j$

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

La dérivabilité de g_i en t_0 ne fait alors aucun doute et

$$\forall i,\ g'_i(t_0) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, f'_j(t_0)$$

Mais alors $g = L \circ f$ est dérivable en t_0 et

$g'(t_0) = L(f'(t_0))$ $\square$

$Y(t) = P X(t)$ $\qquad\qquad Y'(t) = A Y(t)$

$Y'(t) = P X'(t)$

<u>Exercice</u> : Déterminer les solutions (x_1, x_2) du système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'_1(t) = 2x_1(t) + x_2(t) \\ x'_2(t) = x_1(t) + 2x_2(t) \end{cases}$$

$\mathbb{C}$ En posant $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ où $\forall t, X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$

le système s'écrit aussi

$$X'(t) = A X(t) \text{ où } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ainsi $A = PDP^{-1}$ en posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

on pose alors $X(t) = P Y(t)$ (ainsi $X'(t) = P Y'(t)$)

(c-à-d $Y(t) = P^{-1} X(t)$)

Mais alors $X'(t) = A X(t)$ ssi $P Y'(t) = A P Y(t)$

ssi $Y'(t) = D Y(t)$

en posant $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ on a donc

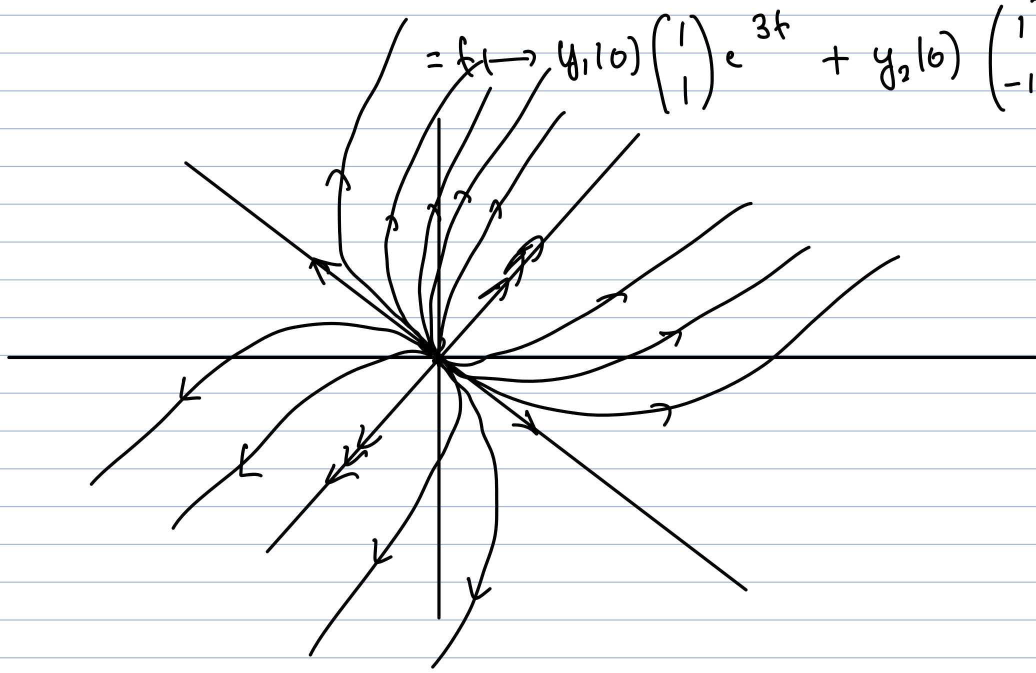
$$\forall t \begin{cases} x'_1(t) = 2x_1(t) + x_2(t) \\ x'_2(t) = x_1(t) + 2x_2(t) \end{cases} \text{ ssi } \forall t \begin{cases} y'_1(t) = 3y_1(t) \\ y'_2(t) = y_2(t) \end{cases}$$

ssi $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(0)\, e^{3t} \\ y_2(0)\, e^{t} \end{pmatrix}$

Ainsi (x_1, x_2) est solution de notre système ssi

X prend la forme $t \mapsto P\begin{pmatrix} y_1(0)e^{3t} \\ y_2(0)e^{t} \end{pmatrix}$

$= t \mapsto y_1(0)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{3t} + y_2(0)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{t}$.



Autre exemple : Résoudre

$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_1 \end{cases}$ ou encore : $X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = PDP^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

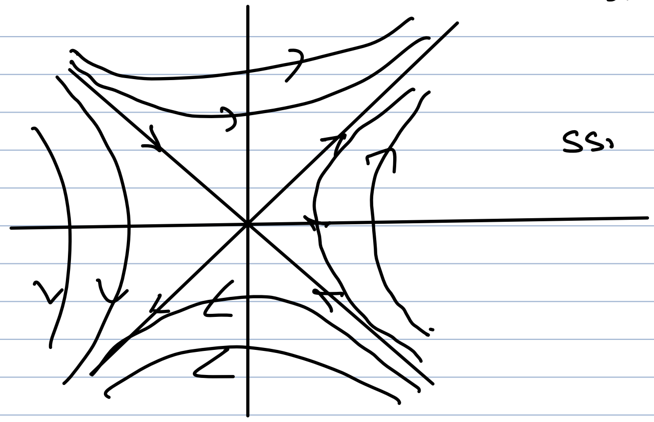
$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

étant donnée $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dérivable
on pose encore

$Y = P^{-1}X$, Y est encore dérivable et
$Y' = P^{-1}X'$

Ainsi $X' = AX$ ssi $Y' = DY$

ssi $Y = t \mapsto \begin{pmatrix} \lambda e^{t} \\ \mu e^{-t} \end{pmatrix}$



ssi $X = t \mapsto \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$.

[(non exigible)

$(e_1, \dots, e_n)$ base canoniq de $\mathbb{R}^n$.

~~soit~~ on pose $\forall i,j, \quad a_{i,j} = B(e_i, e_j)$

alors pour tout $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ élts de $\mathbb{R}^n$,

$$B(x,y) = B\left(\sum x_i e_i, \sum y_j e_j\right)$$

$$= \sum_i \sum_j x_i y_j \; B(e_i, e_j) \quad \text{par bilinéarité)}$$

$$= \sum_{(i,j)} a_{i,j} \, x_i \, y_j .$$

Donc $B(f,g) = \sum_{(i,j)} a_{ij} \, f_i \times g_j$

$$B(f,g)'(t_0) = \sum_{(i,j)} a_{i,j} \left(f_i'(t_0) g_j(t_0) + f_i(t_0) g_j'(t_0) \right)$$

$$= \sum_{(i,j)} a_{i,j} \, f_i'(t_0) \, g_j(t_0) + \sum_{(i,j)} a_{i,j} \, f_i(t_0) \, g_j'(t_0)$$

$$= B(f'(t_0), g(t_0)) + B(f(t_0), g'(t_0)). \quad]$$

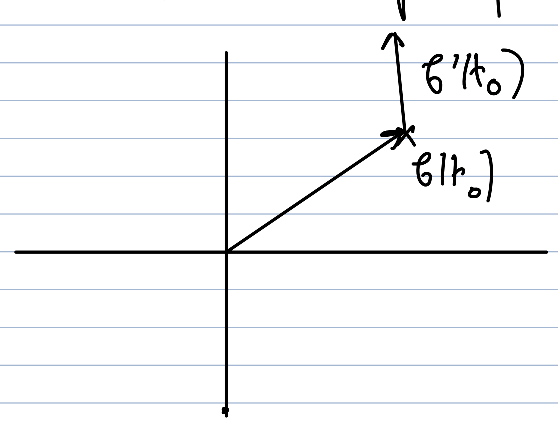
<u>Exercice</u> : Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$ dérivable. On suppose que $t_0 \in I$ et $f(t_0) \neq 0$.

Montrer $g : t \mapsto \|f(t)\|$ (norme euclidienne canonique) est dérivable en t_0 et calculer $g'(t_0)$.

[$\forall t \in I, \; g(t) = \sqrt{\langle f(t), f(t) \rangle}$

g est alors dérivable en t_0 (on n'oublie pas que $\langle f(t_0), f(t_0) \rangle > 0$)

et $g'(t_0) = \dfrac{\langle f(t_0), f'(t_0) \rangle}{\|f(t_0)\|}$



]

Exercice :

Calculer pour tout (x, α, β) : $\begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 1 & \cos(x+\alpha) & \sin(x+\alpha) \\ 1 & \cos(x+\beta) & \sin(x+\beta) \end{vmatrix}$

[Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ On pose $f : x \longmapsto \begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 1 & \cos(x+\alpha) & \sin(x+\alpha) \\ 1 & \cos(x+\beta) & \sin(x+\beta) \end{vmatrix}$

alors f est dérivable et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \begin{vmatrix} 0 & \cos x & \sin x \\ 0 & \cos(x+\alpha) & \sin(x+\alpha) \\ 0 & \cos(x+\beta) & \sin(x+\beta) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -\sin x & \sin x \\ 1 & -\sin(x+\alpha) & \sin(x+\alpha) \\ 1 & -\sin(x+\beta) & \sin(x+\beta) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & \cos x & \cos x \\ 1 & \cos(x+\alpha) & \cos(x+\alpha) \\ 1 & \cos(x+\beta) & \cos(x+\beta) \end{vmatrix}$$

$$= 0$$

Ainsi f est constante, or $f(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 1 & \cos\beta & \sin\beta \end{vmatrix}$

$$= \sin(\beta-\alpha) + \sin\alpha - \sin\beta.$$

donc $\forall x,\ f(x) =$ __________]

P.16