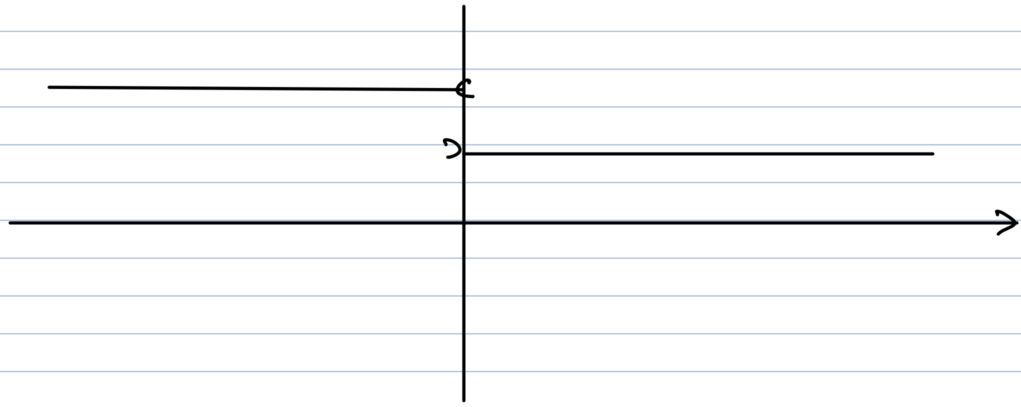
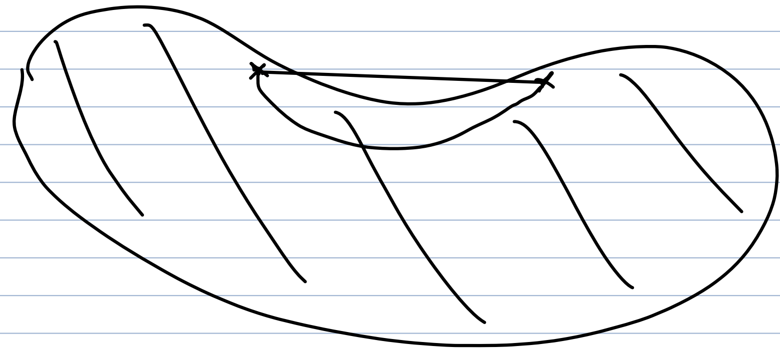




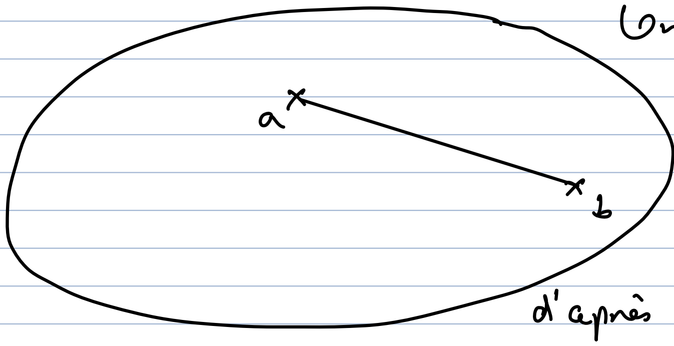
$$[a,b] = \{ ta+(1-t)b \mid t \in [0,1] \}$$

$$\left( ta+(1-t)b = \underbrace{b} + t\,(a-b) \right)$$

$$B + t\,.\,\overrightarrow{BA}$$


Th. 14 | [ Soit $a \in U$ fixé,

et soit encore $b \in U$, on va montrer que $f(b) = f(a)$.




On pose $\varphi : [0,1] \to U$

$t \mapsto tb+(1-t)a$

$\varphi$ est alors de classe $C^1$

tout comme $g = f \circ \varphi$

d'après la règle de la chaîne

et, de plus, $\forall t \in [0,1]$,

$$g'(t) = x'_1(t)\,\partial_1 f(\varphi(t)) + \dots + x'_p(t)\,\partial_p f(\varphi(t))$$

$\left(= df(\varphi(t))\,(\varphi'(t))\right)$ en notant $\forall t,\ \varphi(t) = (x_1(t), \dots, x_p(t))$

Par hypothèse, les dérivées partielles de $f$ sont identiquement nulles et donc $\forall t \in [0,1],\ g'(t) = 0$.

$g$ est alors constante (dérivable de dérivée nulle sur l'intervalle $[0,1]$)

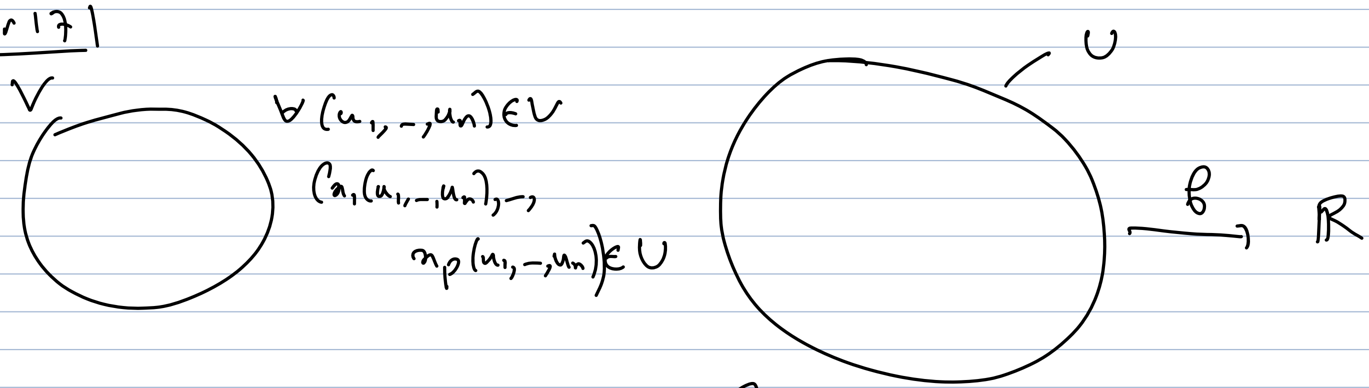
et ainsi $g(0) = g(1)$

ou, en d'autres termes, $f(a) = f(b)$.

$b \in U$ étant ici quelconque, on a donc montré que pour tout $b \in U$, $f(b) = f(a)$ et ainsi $f$ est bien constante sur $U$. ]

Corollaire 16 | [ On applique le th. 14 à la fonction $f - g$ qui est $C^1$ sur l'ouvert convexe $U$ et de dérivées partielles nulles, et qui est donc constante. ].

Cor 17 |




$$g : V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(u_1,\dots,u_n) \longmapsto f(x_1(u_1,\dots,u_n),\dots,x_p(u_1,\dots,u_n))$$

[ Soit $i \in [\![1,n]\!]$ et soit $(u_1,\dots,u_n) \in U$.

On sait que pour $t \in \mathbb{R}$ au voisinage de $u_i$,

$$(u_1,\dots,u_{i-1},t,u_{i+1},\dots,u_n) \in U \quad \text{(car } V \text{ est ouvert)}$$

et, de plus, $t \mapsto x_1(u_1,\dots,u_{i-1},t,u_{i+1},\dots,u_n), \dots, t \mapsto x_p(u_1,\dots,u_{i-1},t,u_{i+1},\dots,u_n)$ sont de classe $C^1$ ainsi donc que

$$\varphi : t \mapsto (x_1(u_1,\dots,u_{i-1},t,u_{i+1},\dots,u_n),\dots,x_p(u_1,\dots,u_{i-1},t,u_{i+1},\dots,u_n))$$

D'après la règle de la chaîne, $f \circ \varphi$ est à son tour de classe $C^1$ (au voisinage de $u_i$) et est en particulier dérivable en $u_i$

et $(f\circ\varphi)'(u_i) = \varphi_1'(u_i)\,\partial_1 f(\varphi(u_i)) + \dots + \varphi_p'(u_i)\,\partial_p f(\varphi(u_i))$

$$= \partial_i x_1(u_1,\dots,u_n)\,\partial_1 f(x_1(u_1,\dots,u_n),\dots,x_p(u_1,\dots,u_n))$$
$$+ \dots + \partial_i x_p(u_1,\dots,u_n)\,\partial_p f(x_1(u_1,\dots,u_n),\dots,x_p(u_1,\dots,u_n))$$

Par ailleurs, $f\circ\varphi = t \mapsto g(u_1, \dots, u_{i-1}, t, u_{i+1}, \dots, u_n)$

et la dérivabilité de $f\circ\varphi$ en $u_i$ exprime que $g$ admet une dérivée partielle selon sa $i$-ième variable en $(u_1, \dots, u_n)$ et bien sûr

alors ; on vient d'établir que :

$$\partial_i g(u_1, \dots, u_n) = (f\circ\varphi)'(u_i)$$
$$= \sum_{j=1}^{p} \partial_i x_j(u_1, \dots, u_n)\, \partial_j f(x_1(u_1, \dots, u_n), \dots, x_p(u_1, \dots, u_n))$$

]

<u>Exercice 3</u> [ $x$ ayant pour coordonnées $(x'_1, x'_2)$ selon $B'$,

alors $x = x'_1 v_1 + x'_2 v_2$

c-à-d $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x'_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x'_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2x'_1 - x'_2 \\ x'_1 + 2x'_2 \end{pmatrix}$

$$\underbrace{X = P_{B\to B'}\, X'}_{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}}$$

Ainsi, $\forall (x'_1, x'_2) \in \mathbb{R}^2$, $g(x'_1, x'_2) = f(2x'_1 - x'_2, x'_1 + 2x'_2)$

D'après la règle de la chaîne, $g$ admet des dérivées partielles en tout point et

$$\forall (x'_1, x'_2) \in \mathbb{R}^2,\ \partial_1 g(x'_1, x'_2) = 2\,\partial_1 f(2x'_1 - x'_2, x'_1 + 2x'_2) + 1.\,\partial_2 f(2x'_1 - x'_2, x'_1 + 2x'_2)$$

$$\partial_2 g(x'_1, x'_2) = -\partial_1 f(2x'_1 - x'_2, x'_1 + 2x'_2) + 2\,\partial_2 f(2x'_1 - x'_2, x'_1 + 2x'_2).$$ ]

<u>Exemple 8</u> D'après la règle de la chaîne :

$$\partial_1 g(\rho, \theta) = \cos\theta\, \partial_1 f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) + \sin\theta\, \partial_2 f(\rho\cos, \rho\sin\theta)$$
$$\frac{\partial g}{\partial\theta}(\rho, \theta) = -\rho\sin\theta \frac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) + \rho\cos\theta \frac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$$

<u>Exo 7</u> (feuille de TD)

$$\frac{f(t^2, \operatorname{ch} t, e^t)}{f(t, \cos t, \operatorname{ch} t)} \xrightarrow[t\to 0]{} \ ?$$

$f$ étant de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^3$, elle admet en tout point, et en particulier en $(0,1,1)$, un DL à l'ordre 1.

Ainsi $\underbrace{f(h_1, 1+h_2, 1+h_3)}_{(0,1,1)+(h_1,h_2,h_3)} = \underbrace{f(0,1,1)}_{=0} + h_1\partial_1 f(0,1,1) + h_2\partial_2 f(0,1,1) + h_3\partial_3 f(0,1,1) + o(\|h\|)$

On a ainsi, au voisinage de 0 :

$$f(t^2, \mathrm{ch}\,t, e^t) \underset{t\to 0}{=} f\left(t^2, 1+\frac{t^2}{2}+o(t^2), 1+t+o(t)\right)$$

$$\underset{t\to 0}{=} t^2\times 1 + \left(\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right)\times 2 + (t+o(t))\times 3 + \underbrace{o\left(\left\|\left(t^2, \frac{t^2}{2}+o(t^2), t+o(t)\right)\right\|\right)}_{o(t)}$$

$$\underset{t\to 0}{=} 3t + o(t)$$

$$f(t, \cos t, \mathrm{ch}\,t) \underset{t\to 0}{=} f\left(t, 1-\frac{t^2}{2}+o(t^2), 1+\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right)$$

$$\underset{t\to 0}{=} t\times 1 + \left(-\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right)\times 2 + \left(\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right)\times 3 + o(t)$$

$$\underset{t\to 0}{=} t + o(t)$$

Ainsi $\dfrac{f(t^2, \mathrm{ch}\,t, e^t)}{f(t, \cos t, \mathrm{ch}\,t)} \underset{t\to 0}{=} \dfrac{3t+o(t)}{t+o(t)} \xrightarrow[t\to 0]{} 3$

Exo 8 | Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$(1+x^2)(1+y^2) - (1+xy)^2 = \cdots = (x-y)^2 \geqslant 0$$

De plus, il y a égalité ssi $x=y$.

ainsi $\left|\dfrac{1+xy}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}\right| \leqslant 1$ avec égalité ssi $x=y$

arcsin étant de classe $C^1$ sur $]-1,1[$, on déduit des thm généraux que $f$ l'est aussi sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(x,x) / x\in\mathbb{R}\}$.

2. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tq $x\neq y$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left(\frac{y}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}} - \frac{(1+xy)x}{(1+x^2)^{3/2}(1+y^2)^{1/2}}\right)\times\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{(1+xy)^2}{(1+x^2)(1+y^2)}}}$$

$$= \left(y - \frac{x(1+xy)}{1+x^2}\right)\frac{1}{\sqrt{(x-y)^2}}$$

$$= \left(\frac{y-x}{1+x^2}\right)\frac{1}{|x-y|}$$

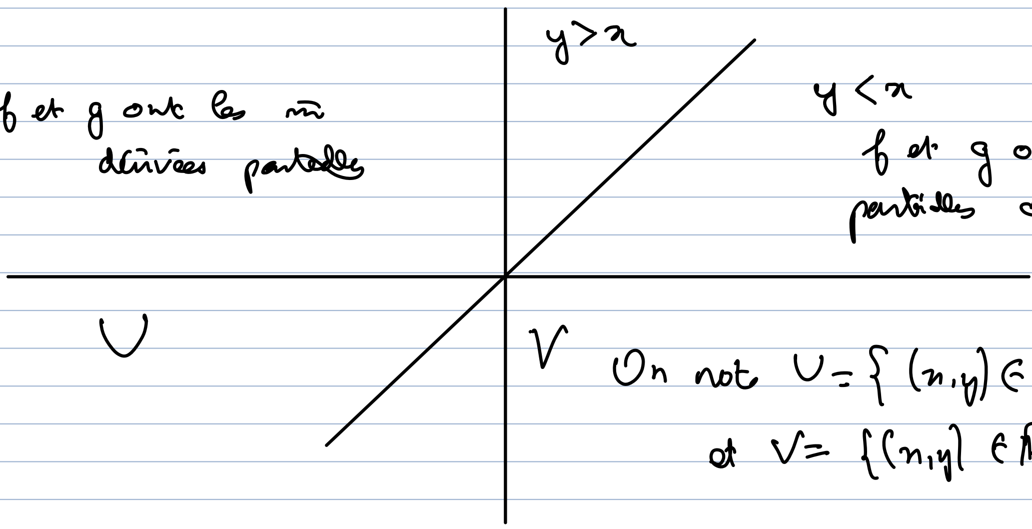
On voit alors que si $y-x>0$ : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{1}{1+x^2}$

et, si $y-x<0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{-1}{1+x^2}$.

On montre de même que si $y>x$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\dfrac{1}{1+y^2}$ et si $y<x$ :
$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\dfrac{1}{1+y^2}$.

$g$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=\frac{1}{1+x^2}\ ,\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=-\frac{1}{1+y^2}.$$




On note $U=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y>x\}$
et $V=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y<x\}$.

$U$ étant un ouvert convexe de $\mathbb{R}^2$, $f$ et $g$ sont, sur $U$, égales à une constante additive près.

Il existe donc $k\in\mathbb{R}$ tq $\forall (x,y)\in U$, $f(x,y)=g(x,y)+k$

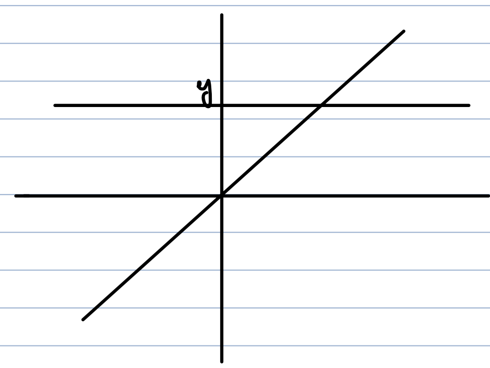
Pour la même raison, $f$ et $-g$ sont égales, sur $V$ égales à une constante additive près, ainsi il existe $k'\in\mathbb{R}$ tq
$\forall (x,y)\in V$, $f(x,y)=-g(x,y)+k'$.

× <u>Détermination de $k$ et $k'$</u> :

On rappelle que $f$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ (et $g$ aussi, car $g$ est $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$)

Fixons $y\in\mathbb{R}$, alors

$\forall x<y$, $f(x,y)=g(x,y)+k$




en faisant tendre $x$ vers $y$, il vient,
par continuité de $f$ et de $g$ :

$f(y,y)=g(y,y)+k$

c-à-d $\arcsin 1 = 0 + k$

donc $k = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$.

De m. $\forall x > y$, $f(x,y) = -g(x,y) + k'$

et il vient donc $f(y,y) = k' = \frac{\pi}{2}$

Ainsi $\forall (x,y)$, $x < y \Rightarrow f(x,y) = \arctan x - \arctan y + \frac{\pi}{2}$

$x > y \Rightarrow f(x,y) = \arctan y - \arctan x + \frac{\pi}{2}$

<u>Autre méthode</u> : Poser $(x,y) = (0, \sqrt{3})$ et calculer $f(x,y)$, $g(x,y)$ (on trouve $k$)

et de m. $(x,y) = (\sqrt{3}, 0)$

et calculer ...

---

$\text{grad}\, f(a)$ $\quad\quad$ $\nabla f(a)$

Si $f$ est de classe $C^1$, $a \in U$ et $h$ tq $a + h \in U$ :

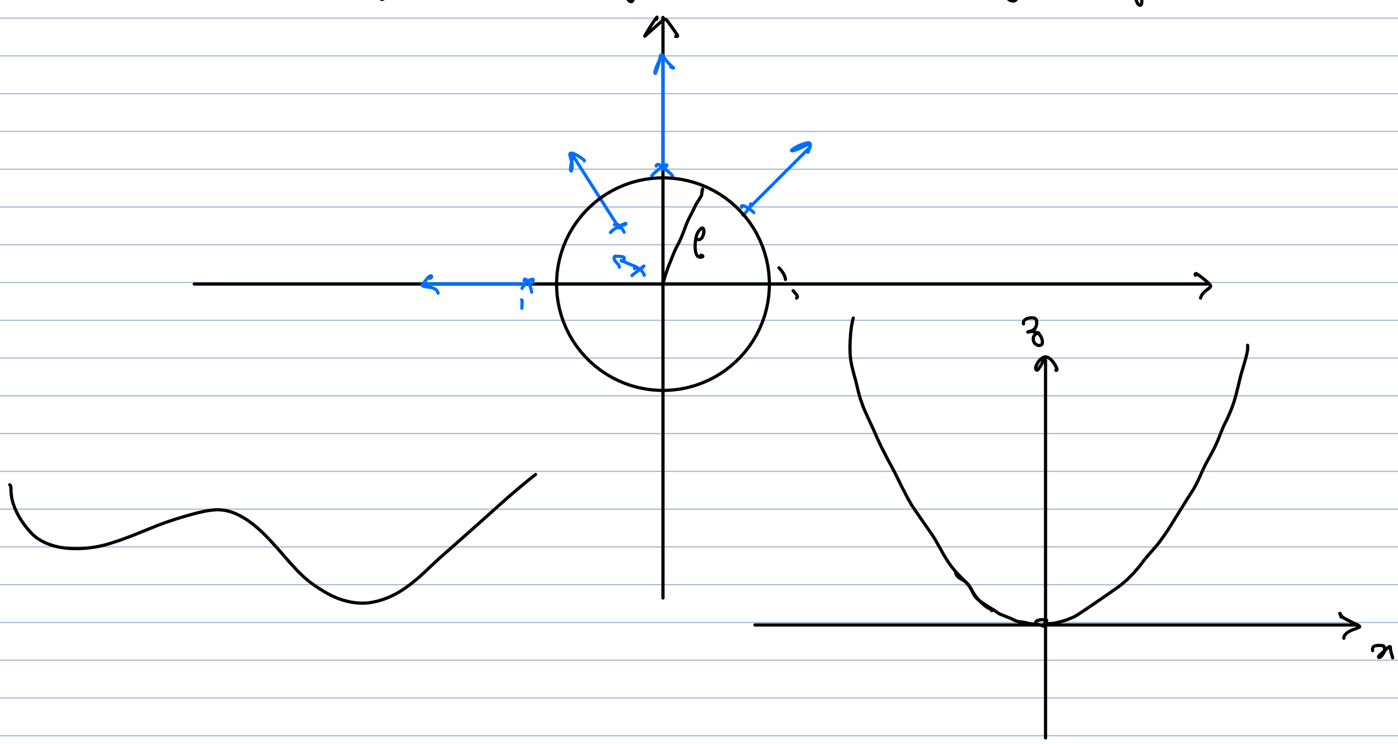
$$f(a+h) = f(a) + \underbrace{h_1 \partial_1 f(a) + \cdots + h_p \partial_p f(a)}_{\langle \nabla f(a), h \rangle} + o(\|h\|)$$

$f(x,y) = x^2 + y^2$.

$\nabla f(x,y) = (2x, 2y)$

$z = f(x,y)$

$z = x^2 + y^2$.



Rappel : $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable en $x_0$,

alors $C_f$ présente en $x_0$ une tangente d'équation :

$$y = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0)$$

laquelle "provient" du DL de $f$ en $x_0$ à l'ordre 1 :

$$f(x_0 + h) \underset{h \to 0}{=} f(x_0) + h f'(x_0) + o(h)$$

ou encore $f(x) \underset{x \to x_0}{=} f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + o(x - x_0)$

---

Généralisation : $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^1$

$(x_0, y_0) \in U$

Le DL de $f$ en $(x_0, y_0)$ à l'ordre 1 s'écrit :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + o(\|(h,k)\|)$$

ou encore

$$f(x,y) \underset{(x,y) \to (x_0, y_0)}{=} f(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + o(\|(x - x_0, y - y_0)\|)$$

D'où l'on déduit que le plan d'équation

$$z = f(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

mérite d'être appelé plan tangent

Ce plan est aussi le plan passant par $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

et dirigé par les vecteurs $\left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right), \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$

$$\boxed{z = x \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)} + f(x_0, y_0) - x_0 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) - y_0 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Révisions : Résoudre l'équation $2x + y + z - 1 = 0$

d'inconnues $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

[L'équation s'écrit encore $z = 1 - 2x - y$

et l'ensemble des solutions s'en déduit :

$$\{ (x, y, 1 - 2x - y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2 \}$$

$= \{ (0,0,1) + x(1,0,-2) + y(0,1,-1) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2 \}$

$= (0,0,1) + \mathbb{R}.(1,0,-2) + \mathbb{R}.(0,1,-1)$

et on reconnaît le plan passant par $(0,0,1)$ et dirigé par $(1,0,-2)$ et $(0,1,-1)$. $]$

$\partial_i f \qquad \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$

$\partial_{j,i} f \qquad \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}, \qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$

---

Exercice 4 |

$[$.1 $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ d'après les thm généraux.

et $\forall (x,y) \neq (0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{3x^2 y}{x^2+y^2} - \dfrac{2x^4 y}{(x^2+y^2)^2}$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{x^3}{x^2+y^2} - \dfrac{2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}$.

$\forall x \neq 0$, $f(x,0) = 0$ et $f(0,0) = 0$

ainsi $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et vaut $0$

et, de même $\forall y \neq 0$, $f(0,y) = 0$ et $f(0,0) = 0$

donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existe et vaut $0$

Puis, $\forall (x,y) \neq (0,0)$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leq 3|y| \underbrace{\dfrac{x^2}{x^2+y^2}}_{\leq 1} + 2|y| \underbrace{\dfrac{x^4}{(x^2+y^2)^2}}_{\leq 1}$

$\leq 5|y|$

donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$

donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0,0)$

(ainsi que sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ comme on l'a vu, donc sur $\mathbb{R}^2$)

Autre méthode pour $\frac{\partial f}{\partial y}$ : on passe en coordonnées polaires :

$(x,y) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \rho\cos^3\theta - 2\rho\cos^3\theta\sin^2\theta$$

$$\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

Ainsi $f$ est bien de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$.