Espaces vectoriels normés

Réponse 1. C'est une application $N: E \to \mathbb{K}$ telle que

- (séparation) $\forall x \in E,\ N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.
- (homogénéïté) $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in E,\ N(\lambda \cdot x) = |\lambda| \cdot N(x)$
- (inégalité triangulaire) $\forall (x, y) \in E^2,\ N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$.

Réponse 2. Si et seulement si il existe $0 < \alpha < \beta$ des réels tels que pour tout $x \in E, \alpha N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant \beta N_1(x)$.

(Quand deux normes sont équivalentes, on peut remarquer que les parties bornées pour l'une sont les parties bornées pour l'autre, les suites convergentes pour l'une sont les suites convergentes pour l'autre, les parties ouvertes pour l'une sont les parties ouvertes pour l'autre etc...)

Réponse 3. La boule ouverte de centre x et de rayon r est $B(x, r) = \{x' \in E \mid \|x - x'\| < r\}$, la boule fermée est $B^F(x, r) = \{x' \in E \mid |\|x - x'\| \leqslant r\}$ et la sphère de centre x et de rayon r est $S(a, r) = \{x' \in E \mid |\|x - x'\| = r\}$.

Réponse 4. En dimension finie, on sait que toutes les normes sont équivalentes, donc par exemple les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes (on rappelle que si $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, alors $\|x\|_1 = \sum |x_i|$, $\|x\|_2 = \sqrt{\sum x_i^2}$ et $\|x\|_\infty = \max |x_i|$.

Ce n'est donc qu'en dimension infinie que l'on peut donner l'exemple de normes non équivalentes. On a vu en cours que sur $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, en notant pour tout $f \in E$, $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$ et $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, \mathrm{d}t$, alors $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ ne sont pas équivalentes car on peut construire une suite (f_n) telle que $\|f_n\|_\infty = 1$ tandis que $\|f_n\|_1 \to 0$ (par exemple : f_n qui à t associe t^n.)

Réponse 5. $[A\,B] = \{\lambda\, A + (1 - \lambda)\, B | \lambda \in [0, 1]\}$ (C'est un segment)

Réponse 6. si et seulement si $\forall (A, B) \in X^2, [A, B] \subset X$

Réponse 7. Si et seulement si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in X, \|x\| \leqslant M$.

Réponse 8. (u_n) converge vers l si et seulement si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \|u_n - l\| < \varepsilon$. Il est judicieux de se souvenir de la caractérisation (évidente) que (u_n) converge vers l si et seulement si $(u_n - l)$ converge vers 0.

Réponse 9. x est intérieur à X si et seulement si il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset X$. $\overset{\circ}{X}$ désigne alors l'ensemble des points intérieurs à X, également appelé l'intérieur de X.

Réponse 10. x est adhérent à X si et seulement si $\forall \varepsilon > 0, \exists x' \in X, \|x - x'\| < \varepsilon$ si et seulement si il existe (x_n) une suite de X qui converge vers x. $\overline{X}$ est alors l'ensemble des points adhérents à X, qu'on appelle aussi adhérence de X.

Réponse 11. X est une partie ouverte si et seulement si tout point de X est intérieur à X, autrement dit si et seulement si $\forall x \in X, \exists r > 0, B(x, r) \subset X$.

Réponse 12. X est une partie fermée de E si et seulement si tout point adhérent à X est un élément de X (ce qui revient bien sûr à $X = \overline{X}$) si et seulement si pour toute suite (x_n) de X convergente, alors la limite de (x_n) est encore un élément de X.

A noter aussi qu'une partie est fermée si et seulement si son complémentaire est une partie ouverte.

Réponse 13. Toute réunion d'ouverts est un ouvert, ainsi que toute intersection **finie** d'ouverts

Toute intersection de fermés est un fermé, ainsi que toute union **finie** de fermés.

Réponse 14. f a pour limite l en a si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in X, \|x - a\| < \alpha \Rightarrow \|f(x) - l\| < \varepsilon$$

si et seulement si **pour toute** suite (x_n) de X qui converge vers a, alors $(f(x_n))$ converge vers l.

Réponse 15. On remarque déjà que $\det: M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est continue, puis que $GL_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) \neq 0\} = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) < 0\} \cup \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) > 0\}$ et donc $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est la réunion de deux ouverts, et est donc un ouvert.

Réponse 16. Il a en fait deux versions. La version la plus élémentaire traite des fonctions réelles d'une variable réelle : si $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue, alors f est bornée et atteint ses bornes.

Seconde version : soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, et soit X une partie non vide fermée et bornée de E, et soit $f: X \to \mathbb{R}$ une application continue, alors f est bornée et atteint ses bornes.