Polynômes

Réponse 1. $d(P+Q) \leqslant \max(d(P), d(Q))$ et, de plus, si $d(P) \neq d(Q)$, alors $d(P+Q) = \max(d(P), d(Q))$.

(Si $d(P) = d(Q)$, alors l'égalité n'est pas certaine, et si on a besoin de déterminer le degré de $P+Q$, on regarde les coefficients respectifs de P et Q… Les coefficients dominants s'annulent-ils ?)

En revanche, le produit est plus facile puisqu'on a toujours $d(P \times Q) = d(P) + d(Q)$.

Réponse 2. Une base de $\mathbb{K}_n[X]$ est sa base canonique $(1, X, \cdots, X^n)$, mais également toute famille de polynômes $(P_0, \cdots, P_n)$ telle que pour tout k, $d(P_k) = k$ (théorème des degrés étagés)

Bien sûr la dimension $n+1$ de $\mathbb{K}_n[X]$ s'en déduit.

Réponse 3.

1. Comme $\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension finie $n+1$ et que $(L_0, \cdots, L_n)$ compte $n+1$ vecteurs, il suffit d'en montrer la liberté or, si $(\lambda_0, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ est tel que $\lambda_0 \cdot L_0 + \cdots + \lambda_n \cdot L_n = 0$, alors $(\lambda_0 \cdot L_0 + \cdots + \lambda_n \cdot L_n)(x_k) = \lambda_k = 0$ et ce pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ et donc $(L_0, \cdots, L_n)$ est bien une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

2. Analyse-synthèse : P s'écrit sous la forme $p_0 \cdot L_0 + \cdots + p_n \cdot L_n$ et il n'y a plus qu'à déterminer les p_k : on calcule de part et d'autre l'image de x_k et on obtient $p_k = P(x_k)$ et les coordonnées de P sont donc $(P(x_0), \cdots, P(x_n))$.

3. De la question précédente, on reconnaît le polynôme constant 1.

Vous l'aurez reconnu, il s'agit là des polynômes interpolateurs de Lagrange

Réponse 4. Etant donnés $A \in \mathbb{K}[X]$ et $B \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$, alors il existe $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ unique tel que $A = B\,Q + R$ et $d(R) < d(B)$. Q est appelé le quotient de la division euclidienne de A par B, et R le reste.

Réponse 5. $A \times (A - 3\,I_p) = -2\,I_p$ et on en déduit que A est inversible d'inverse $\frac{1}{2}(3\,I_p - A)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3\,X + 2$ s'écrit :

$$X^n = (X^2 - 3\,X + 2)\,Q(X) + R(X)$$

où $d(R) < 2$. De plus, en remplaçant X par 1 et 2 (ce sont les racines de $X^2 - 3\,X + 2$) il vient $R(1) = 1$ et $R(2) = 2^n$ et donc $R(X) = (2^n - 1)\,X + 2 - 2^n$ et enfin, en remplaçant X par A, on obtient $A^n = (2^n - 1)\,A + (2 - 2^n)\,I_p$.

Réponse 6. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$, alors $P(a+X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P^{(n)}(a)}{n!}\,X^n$ et $P(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P^{(n)}(a)}{n!}\,(X-a)^n$

Réponse 7. Si et seulement l'une des conditions suivantes (équivalentes) est satisfaite :

i. $(X - \lambda)^m$ divise P mais $(X - \lambda)^{m+1}$ ne divise pas P

ii. Il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(X) = (X - \lambda)^m\,Q(X)$ et $Q(\lambda) \neq 0$

iii. $P(\lambda) = \cdots = P^{(m-1)}(\lambda) = 0$ et $P^{(m)}(\lambda) \neq 0$.

N.B. : si $m = 1$, on parle de racine simple, si $m = 2$, de racine double…

Réponse 8. C'est un polynôme non constant et dont les diviseurs sont les polynômes constants non nuls et les polynômes qui lui sont associés.

Réponse 9. Les polynômes de degré 1 (et seulement ceux-ci, en vertu du théorème de d'Alembert-Gauss)

Réponse 10. Les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 dont les racines (distinctes) sont complexes conjuguées.

Réponse 11. Un polynôme qui admet, comptées avec leurs multiplicités, exactement autant de racines que son degré, autrement dit un polynôme qui s'écrit sous la forme $\lambda\,(X-\lambda_1)^{m_1}\cdots(X-\lambda_n)^{m_n}$

Réponse 12. On remarque que $P(X)=a_n\,(X-\lambda_1)\cdots(X-\lambda_n)$ et le coefficient constant de P vaut donc $a_n\prod(-\lambda_k)$ et le coefficient selon X^{n-1} vaut quant à lui $-a_n\,(\sum\lambda_k)$ et on en déduit que $\sum\lambda_k=-\frac{a_{n-1}}{a_n}$, $\prod\lambda_k=(-1)^n\,\frac{a_0}{a_n}$.

Réponse 13. Oui, (z_1,z_2) est solution si et seulement si z_1 et z_2 sont les racines du polynômes $X^2-S\,X+P$ et ce polynôme admet bien toujours sur $\mathbb{C}$ deux racines (éventuellement confondues) et notre système admet donc, en général, deux couples solutions (obtenus en échangeant leurs deux composantes).

Solution 1. Raisonner sur le degré est essentiel ici. On établit sans peine que pour tout $P\in\mathbb{K}_n[X]$, alors $d(f(P))=d(P)$. On peut alors conclure en remarquant que $\mathrm{Ker}(f)=\{0\}$ et que $\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension finie $n+1$.

On peut aussi conclure en notant que la famille $(f(1),f(X),\cdots,f(X^n))$ forme alors, en vertu du théorème des degrés étagés, une base de $\mathbb{K}_n[X]$. f transformant une base de $\mathbb{K}_n[X]$ en une autre base de $\mathbb{K}_n[X]$ en est alors un automorphisme.

Avec une matrice : $\mathrm{Mat}_{(1,X,\cdots,X^n)}(f)=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et cette matrice, triangulaire supérieure de coefficients diagonaux tous non nuls est inversible. (On peut aussi, si on veut, remarquer que son déterminant vaut 1)

enfin, pour déterminer un antécédent de $Q\in\mathbb{K}_n[X]$, on note que $f(Q)=Q-Q'$, puis $f(Q+Q')=Q-Q''$ et ainsi on devine que $f(Q+Q'+\cdots+Q^{(n)})=Q-Q^{(n+1)}=Q$ car, sachant $d(Q)\leqslant n$ on a $Q^{(n+1)}=0$.