Programme de colles mathématiques PC

Semaine 3 du 23/9 au 27/9

1 Révision d'analyse :

Suites de réels. Convergence, limite. Séries de termes positifs. Comparaison série-intégrale.

Séries absolument convergentes, critère de Riemann. Règle de d'Alembert.

Séries alternées, produit de Cauchy de séries absolument convergentes.

- Séries géométriques (proposition 33) condition nécessaire et suffisante de convergence et somme éventuelle.
- Lemme 37 (encadrement de $\sum_{k=0}^{n} f(k)$ par des intégrales)
- Critère spécial des séries alternées (énoncé seul, mais complet, avec signe et majoration du reste)

2 Espaces vectoriels

Espaces vectoriels. Sous-espace vectoriel. Espace vectoriel engendré par une partie, par une famille. Famille libre, famille génératrice. Espaces de dimension finie et bases. Sommes de sous-espaces. Espaces en somme directe (2 et plus), espaces supplémentaires et caractérisations.

Applications linéaires. Lien entre l'injectivité, la surjectivité et l'action sur une base, ainsi qu'avec la dimension. Application linéaire définie par son action sur une base. Rang d'une application linéaire.

Projecteurs et symétries. Hyperplans.

Matrices, structure, interprétation matricielle d'une application, matrices carrées, inversibles.

Questions de cours :

- Enoncé (sans preuve) de la définition et des différentes caractérisations de ce que deux espaces F et G sont supplémentaires dans E lorsque E est de dimension finie. (la définition, existence et unicité de la décomposition, avec des bases, et on peut en rajouter avec des arguments de dimension : exemple : si $E = F + G$ et que de plus $\dim E = \dim F + \dim G$, alors...)
- Exercice-type : si F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, alors $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$. (exercice 1 du cours)
- Proposition 11 : $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ sont deux espaces supplémentaires de $M_n(\mathbb{K})$