

Programme de colles mathématiques PC

Semaine 4 du 30/9 au 4/10

1 Révision d'analyse :

Suites de réels. Convergence, limite. Séries de termes positifs. Comparaison série-intégrale.

Séries absolument convergentes, critère de Riemann. Règle de d'Alembert.

Séries alternées, produit de Cauchy de séries absolument convergentes.

- Séries géométriques (proposition 33) condition nécessaire et suffisante de convergence et somme éventuelle.
- Lemme 37 (encadrement de $\sum_{k=0}^n f(k)$ par des intégrales)
- Critère spécial des séries alternées (énoncé seul, mais complet, avec signe et majoration du reste)

2 Espaces vectoriels, matrices et déterminants

Espaces vectoriels. Sous-espace vectoriel. Espace vectoriel engendré par une partie, par une famille. Famille libre, famille génératrice. Espaces de dimension finie et bases. Sommes de sous-espaces. Espaces en somme directe (2 et plus), espaces supplémentaires et caractérisations.

Applications linéaires. Lien entre l'injectivité, la surjectivité et l'action sur une base, ainsi qu'avec la dimension. Application linéaire définie par son action sur une base. Rang d'une application linéaire.

Projecteurs et symétries. Hyperplans.

Matrices, structure, interprétation matricielle d'une application, matrices carrées, inversibles.

Matrices de passage et formules de changement de base.

Matrices définies par blocs, trace.

Déterminant d'une famille de vecteurs, d'un endomorphisme, d'une matrice.

Questions de cours :

- Proposition 11 : $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont deux espaces supplémentaires de $M_n(\mathbb{K})$
- Définition d'une matrice de passage, propriétés (P.16 : énoncé seul) et formule de changement de base pour un vecteur (P.18 : énoncé seul), et pour un endomorphisme (P.21 : énoncé seul)
- Déterminant de Vandermonde (formule et sa preuve)