Programme de colles mathématiques PC

Semaine 6 du 14/10 au 18/10

1 Intégration

Notions de subdivision, définition des fonctions en escalier et continues par morceaux.

Intégrale des fonctions en escalier sur un segment. Rappel des résultats de première année et extension aux fonctions continues par morceaux. Positivité, changement de variable, intégration par parties.

Définition de la convergence de l'intégrale de f continue par morceaux sur $[a,b[$, sur $]a,b]$, sur $]a,b[$.

Positivité, changement de variable, intégration par partie pour une intégrale généralisée.

Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables

- Exercice-type : On suppose I et J des intervalles, $f:I\to\mathbb{K}$ continue, $u:J\to I$ et $v:J\to I$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, alors montrer que $x\in J\mapsto\int_{u(x)}^{v(x)}f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et en préciser la dérivée.

- Etude de la convergence et de la valeur éventuelle de $\int_0^{+\infty}e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ selon la valeur de $\alpha\in\mathbb{R}$.

- Etude de la convergence et de la valeur éventuelle de $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ et de $\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ (oui, on détaille), et enfin de $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$.

- Enoncé de la proposition 40 (détail des fonctions de référence quant à leur intégrabilité)

2 Espaces vectoriels, matrices et déterminants

Matrices, structure, interprétation matricielle d'une application, matrices carrées, inversibles.

Matrices de passage et formules de changement de base.

Matrices définies par blocs, trace.

Déterminant d'une famille de vecteurs, d'un endomorphisme, d'une matrice.

Polynômes : degré d'un polynôme, degrés étagés, racines simples et multiples, relations entre coefficients et racines pour un polynôme scindé (somme et produit des racines seulement), polynômes irréductibles, cas des polynômes réels et complexes.

Polynômes interpolateurs de Lagrange, formule du binôme et application au calcul des polynômes de Tchebychev.

Questions de cours :

- Enoncé des formules donnant, pour $P(X)=a_nX^n+\cdots+a_0$ un polynôme scindé de racines $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ (non supposées 2 à 2 distinctes) les expressions de $\sum\lambda_k$ et $\prod\lambda_k$ en fonction des coefficients du polynôme P.

- Etant donnés $(a_0,\cdots,a_n)$ éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts, explicitation des polynômes $L_0,\cdots,L_n$ tels que pour tout $(i,j), L_i(a_j)=\delta_{i,j}$ et expression du polynôme interpolateur de Lagrange relatif aux points (a_k,b_k) à l'aide des L_k. (Voir au verso si nécessaire)

Remarque 1. Expression du polynôme interpolateur de Lagrange relatif aux (a_k, b_k) : vu les valeurs prises par les polynômes $L_0, \cdots, L_n$, alors le polynôme $b_0\, L_0 + \cdots + b_n\, L_n$ prend pour valeur, en a_k pour $0 \leqslant k \leqslant n$, b_k.

De plus, $d(b_0\, L_0 + \cdots + b_n\, L_n) \leqslant n$ et ainsi on a bien reconnu, sous la forme de $b_0\, L_0 + \cdots + b_n\, L_n$, le polynôme interpolateur de Lagrange en les (a_k, b_k).