**Programme de colles mathématiques PC**

**Semaine 7 du 4/11 au 8/11**

# 1 Intégration

On peut encore poser des exercices sur les intégrales généralisées

# 2 Polynômes et réduction (début)

Polynômes : degré d'un polynôme, degrés étagés, racines simples et multiples, relations entre coefficients et racines pour un polynôme scindé (somme et produit des racines seulement), polynômes irréductibles, cas des polynômes réels et complexes.

Polynômes interpolateurs de Lagrange, formule du binôme et application au calcul des polynômes de Tchebychev.

Valeurs et vecteurs propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée, polynôme caractéristique d'une matrice, d'un endomorphisme. Polynôme annulateur d'un endomorphisme, d'une matrice carrée.

Théorème de Cayley-Hamilton.

Questions de cours :

- Enoncé des formules donnant, pour $P(X)=a_n X^n+\cdots+a_0$ un polynôme scindé de racines $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ (non supposées 2 à 2 distinctes) les expressions de $\sum \lambda_k$ et $\prod \lambda_k$ en fonction des coefficients du polynôme $P$.

- Etant donnés $(a_0,\cdots,a_n)$ éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts, explicitation des polynômes $L_0,\cdots,L_n$ tels que pour tout $(i,j), L_i(a_j)=\delta_{i,j}$ et expression du polynôme interpolateur de Lagrange relatif aux points $(a_k,b_k)$ à l'aide des $L_k$. (Voir au verso si nécessaire)

- Si $u$ et $v$ commutent, alors les espaces propres de $u$ sont stables par $v$.

- Corollaire 20 : si $\lambda$ est une valeur propre de $u$, alors $1\leqslant \dim E_\lambda(u)\leqslant m(\lambda)$

- Matrice compagnon d'un polynôme unitaire $P$ et son polynôme caractéristique. (Proposition 25)

**Remarque 1.** Expression du polynôme interpolateur de Lagrange relatif aux $(a_k, b_k)$ : vu les valeurs prises par les polynômes $L_0, \cdots, L_n$, alors le polynôme $b_0\, L_0 + \cdots + b_n\, L_n$ prend pour valeur, en $a_k$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$, $b_k$.

De plus, $d(b_0\, L_0 + \cdots + b_n\, L_n) \leqslant n$ et ainsi on a bien reconnu, sous la forme de $b_0\, L_0 + \cdots + b_n\, L_n$, le polynôme interpolateur de Lagrange en les $(a_k, b_k)$.