Programme de colles mathématiques PC

Semaine 14 du 6/1 au 10/1

1 Suites définies par une relation de récurrence

Rappels sur les suites arithmétiques, géométriques, voire arithmético-géométriques.

Suites définies par une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.

Etude de suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

2 Espaces préhilbertiens et euclidiens

Définition d'un produit scalaire, et exemples (produit scalaire canonique ou usuel de $\mathbb{R}^n$, de $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$). Inégalité de Cauchy-Schwarz, norme associée à un produit scalaire. Identités de polarisation et du parallélogramme.

Orthogonalité. Pythagore. Projection sur un sous-espace de dimension finie. Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Définition d'un espace euclidien, existence de bases orthonormales.

Isométries vectorielles, exemple des symétries orthogonales.

Définition et caractérisation(s) d'une matrice orthogonale.

Isométries vectorielles du plan orienté.

Endomorphismes autoadjoints et matrices symétriques.

Théorème spectral.

Questions de cours : (oui, on énonce ET on démontre !)

- Inégalité de Cauchy-Schwarz.
- Identité de Pythagore et son application (une famille orthogonale formée de vecteurs tous non nuls est libre)
- Projeté orthogonal d'un vecteur x sur F sev de E muni de $(e_1, \cdots, e_n)$ orthonormale. (Thm 14)
- Caractérisation (P.29) des isométries vectorielles par la préservation du produit scalaire.
- Exercice 4 : étant donnée s une symétrie de E euclidien, alors s est une symétrie orthogonale si et seulement si s est un endomorphisme autoadjoint de E.