

# Programme de colles mathématiques PC

Semaine 15 du 13/1 au 17/1

## 1 Espaces préhilbertiens et euclidiens

Définition d'un produit scalaire, et exemples (produit scalaire canonique ou usuel de  $\mathbb{R}^n$ , de  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ ). Inégalité de Cauchy-Schwarz, norme associée à un produit scalaire. Identités de polarisation et du parallélogramme.

Orthogonalité. Pythagore. Projection sur un sous-espace de dimension finie. Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Définition d'un espace euclidien, existence de bases orthonormales.

Isométries vectorielles, exemple des symétries orthogonales.

Définition et caractérisation(s) d'une matrice orthogonale.

Isométries vectorielles du plan orienté.

Endomorphismes autoadjoints et matrices symétriques.

Théorème spectral. Matrices symétriques positives et définies positives.

Questions de cours :

- Exercice 4 : étant donnée  $s$  une symétrie de  $E$  euclidien, alors  $s$  est une symétrie orthogonale si et seulement si  $s$  est un endomorphisme autoadjoint de  $E$ .

## 2 Séries entières

Rayon de convergence d'une série entière. Recherche de rayon de convergence à l'aide de la règle de d'Alembert. Rayon de convergence de la somme, combinaison linéaire et produit de séries entières.

Continuité de la somme. Dérivation et primitivation d'une série entière.

Questions de cours :

- Lemme d'Abel (énoncé et démonstration bien sûr) et énoncé de la définition du rayon de convergence.
- Énoncé (sans démonstration) des règles de d'Alembert : celle pour les séries numériques (P43 du chapitre concerné) et celle pour les séries entières.
- Continuité de la somme d'une série entière sur l'intervalle ouvert de convergence (P15+C16)

A suivre : fin du chapitre sur les séries entières, rappels sur les équations différentielles.