

# Exercices d'oraux : Mécanique

## Mécanique du point

### Mécanique du point 1

(CCINP mp3)

Une comète a un périhélie de  $r_p = r_0/2$  où  $r_0$  est la distance Terre-Soleil. En  $P$  la vitesse vaut  $v_p = 2v_0$  où  $v_0$  est la vitesse de rotation de Terre autour du Soleil (supposée circulaire).

1. Quelle la nature de la trajectoire ?
2. Déterminer  $v(r)$ .

### Mécanique du point 2

(CCINP mp6)

Une bille de masse  $m$  et de rayon  $b$  est attachée au plafond par un ressort  $(k, \ell_0)$ . La boule est de plus plongée dans un récipient d'eau de masse volumique  $\rho_e$ . La boule subit un frottement fluide  $\vec{f} = -6\pi\eta b\vec{v}$ , où  $\eta$  est la viscosité de l'eau.

Trouver la longueur du ressort à l'équilibre  $\ell_e$ . Établir l'équation différentielle en  $z(t)$ , repérée par rapport à la position d'équilibre, sous la forme :

$$\ddot{z} + 2\lambda \dot{z} + \omega_0^2 z = 0$$

Quelle est la condition pour observer des oscillations ? Que vaut alors la pseudo-période  $T$  ? En l'absence de frottements, que vaut la période propre  $T_0$  ? Proposer une méthode permettant la mesure de  $\eta$ .

### Mécanique du point 3

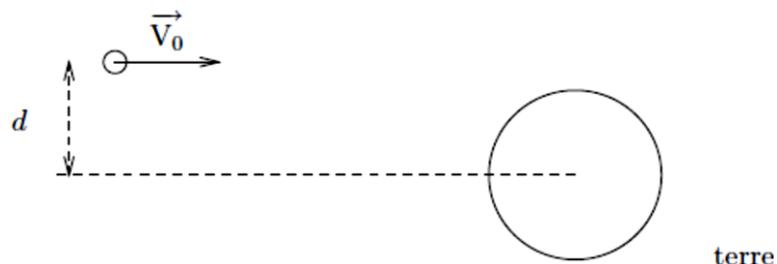
(CCINP mp9)

Définir un satellite géostationnaire et calculer son altitude en prenant  $g_0 = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ,  $R_T = 6400 \text{ km}$  et la durée d'un jour sidéral  $T = 86\,100 \text{ s}$ . Calculer l'énergie à fournir pour faire varier l'altitude de 50 km.

### Mécanique du point 4

(CCINP mp13)

Une météorite décrit une trajectoire rectiligne, à la vitesse constante  $V_0$  distante de  $d = 100 \cdot 10^3 \text{ km}$  du centre de la Terre. Le rayon terrestre est noté  $R$  et vaut  $R = 6\,400 \text{ km}$ . Pénétrant dans le champ de gravitation terrestre, il décrit une orbite hyperbolique dont le centre de la Terre est l'un des foyers. On note  $g_0 = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  le champ de pesanteur à la surface de la Terre. Les frottements dans l'atmosphère seront négligés.



Calculer la valeur limite de  $V_0$  pour que la météorite ne percute pas la Terre.

### Mécanique du point 5

(Centrale mp18)

La molécule HF est caractérisée en partie par le degré de polarisation  $\delta$  compris entre 0 et 1 de la liaison HF. L'énergie potentielle d'interaction est donnée par la relation suivante où  $A$  est une constante positive et  $r$  la distance interatomique :

$$E_p(r) = \frac{A}{r^9} - \frac{\delta^2 e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

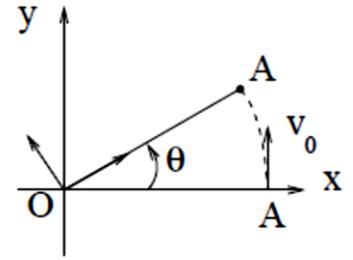
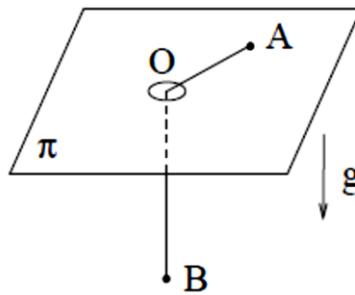
1. Représenter  $E_p(r)$  et interpréter concrètement les deux termes.
2. On suppose que dans le référentiel du centre de masse, les deux atomes évoluent selon une droite. Prévoir les mouvements possibles.
3. Déterminer l'allure du portrait de phase.
4. Calculer  $A$  et  $\delta$  connaissant le moment dipolaire  $p = 6 \cdot 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}$  et la longueur  $d = 92 \text{ pm}$  de la liaison.

## Mécanique du point 6

(Mines mp21)

On dispose de deux masses  $m$  reliées par un fil inextensible de longueur  $L$  toujours tendu et de masse négligeable.  $A$  se déplace sans frottement sur un plan  $\Pi$  horizontal, le fil lié à  $B$  glisse sans frottement au niveau du trou  $O$ . (cf. figures)

1. Montrer que le moment cinétique de  $A$  est constant.
2. Écrire la conservation de l'énergie. Définir une énergie potentielle effective.
3. À quelle condition a-t-on un mouvement circulaire ?



## Mécanique du point 7

(Mines mp26)

Sur un véhicule d'accélération  $a_0 = 3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  horizontale est pendu un pendule simple de longueur  $\ell = 0,8 \text{ m}$ .

1. Trouver la position la position d'équilibre relativement au véhicule.
2. Trouver la période des petites oscillations que fait le pendule autour de la position d'équilibre. Comparer avec la période du pendule si le véhicule est à l'arrêt.

## Mécanique du solide

### Mécanique du solide 1

(CCINP ms6)

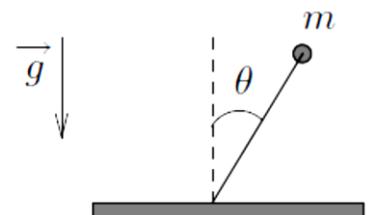
Une échelle de masse  $m$  et de longueur  $2\ell$  repose d'une part sur le sol (coefficient de frottement  $f$ ) et d'autre part contre un mur (sans frottement) en faisant un angle  $\alpha$  avec l'horizontale. À quelle condition une personne de masse  $M$  peut-elle rester en équilibre sur l'échelle en n'importe quel point ?

### Mécanique du solide 2

(CCINP ms7)

Au bout d'une tige de masse nulle fixée en  $O$ , de longueur  $\ell$ , faisant un angle  $\theta$  avec la verticale, on attache une masse  $m$ . La tige subit un couple de rappel  $-C\theta$ .

À quelle condition la tige, écartée de sa position d'équilibre vertical, y retourne-t-elle ? Trouver alors la période des petites oscillations.



### Mécanique du solide 3

(CCINP ms9)

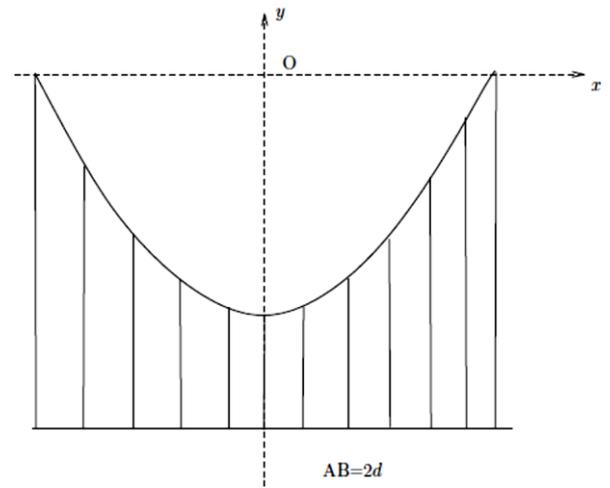
On considère un cylindre de rayon  $R$ , de masse  $m$ , de moment d'inertie par rapport à son axe  $J = \frac{1}{2}mR^2$ . À  $t = 0$ , le cylindre tourne autour de lui-même à la vitesse angulaire  $\omega_0$ . On le pose sur un plan horizontal. On appelle  $k$  le coefficient de frottement.

1. Déterminer l'instant  $t_1$  où le mouvement devient un roulement sans glissement.
2. Calculer le travail de la force de frottement.

**Mécanique du solide 4** (Télécom ms20)

Un pont  $CD$  est suspendu à l'aide d'un grand nombre de fils d'acier équidistants de masse négligeable.

1. Déterminer la forme du câble porteur  $AB$  sachant que l'on néglige sa masse et qu'il doit supporter un pont de masse  $\mu$  par unité de longueur.
2. Quel est la condition à réaliser sachant que la tension du câble  $AB$  ne doit pas dépasser une valeur maximale  $T_{\max}$  ?



**Mécanique du solide 6** (Centrale ms12)

Un chariot de masse négligeable contenant  $n$  sacs de masse  $m$  peut se déplacer selon l'horizontale  $Ox$  sans frottement. Un opérateur est à bord et le chariot est initialement immobile. À  $t_1 = 0$ , l'opérateur lance un sac à la vitesse  $u_0$  vers l'arrière.

1. Définir le système dont la quantité de mouvement est conservée. Exprimer la vitesse  $v_1$  du chariot après  $t_1$ .
2. À  $t_2 = T$ , l'opérateur lance un second sac vers l'arrière à  $u_0$ . Montrer que la vitesse du chariot est alors :

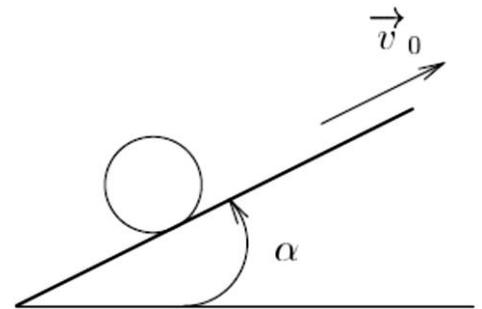
$$v_2 = \left( \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} \right) u_0$$

3. L'opérateur jette successivement les sacs vers l'arrière avec une période  $T$ . Exprimer la vitesse  $v_k$  atteinte après  $k$  sacs lancés. Calculer l'accélération  $a_k$  du chariot sur une période  $T$ .
4. Soit  $D_m$ , le débit massique. Exprimer  $a_k$  en fonction de  $D_m$ ,  $k$ ,  $n$  et  $u_0$ . On a alors une force de poussée  $\Pi = D_m u_0$ .

**Mécanique du solide 7** (Centrale ms16)

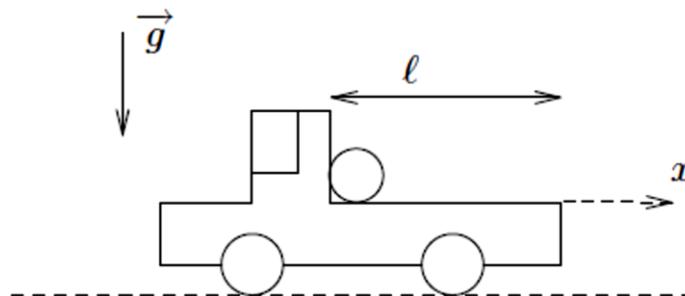
Un cylindre de masse  $M$ , de rayon  $R$  et de moment d'inertie par rapport à son axe  $J = \frac{1}{2}MR^2$  est posé sans vitesse initiale sur un tapis roulant de vitesse constante  $v_0$ . Le contact est caractérisé par un coefficient de frottement de glissement  $f$ .

Montrer qu'initialement, le cylindre glisse. De combien aura tourné le cylindre avant que la phase de glissement ne s'achève ?



**Mécanique du solide 8** (Mines ms19)

Un camion transporte un tonneau cylindrique homogène de rayon  $r$ , de masse  $m$  et de moment d'inertie par rapport à son axe  $J = \frac{1}{2}mr^2$ . Il démarre avec l'accélération constante  $a$  suivant l'axe  $x$ , le tonneau étant à l'avant du camion. On étudie le mouvement du tonneau dans le référentiel du camion. On appelle  $f$  le coefficient de frottement entre le tonneau et le camion.

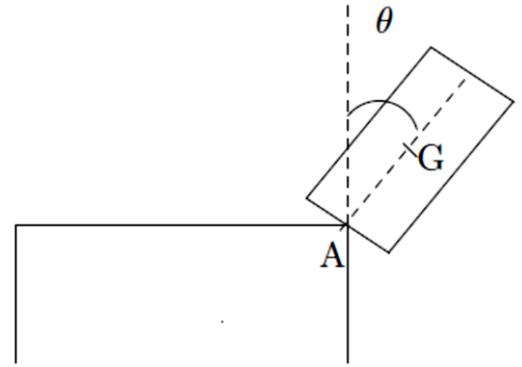


1. Quelle distance a parcouru le camion quand le tonneau tombe à l'arrière du camion ?
2. Quelle est la condition sur  $a$  pour que le roulement s'effectue sans glissement ?

## Mécanique du solide 9 (X ms24)

Un cylindre de rayon  $R$  et de masse  $m$  repose sur le rebord d'une table. On appelle  $J$  le moment d'inertie par rapport à l'axe perpendiculaire à l'axe du cylindre passant par  $A$  et  $\ell = AG$  et  $f$  est le coefficient de frottement.

1. Déterminer les composantes normales et tangentielles de la réaction de la table.
2. Y a-t-il toujours glissement avant décollement ?



## Mécanique des fluides

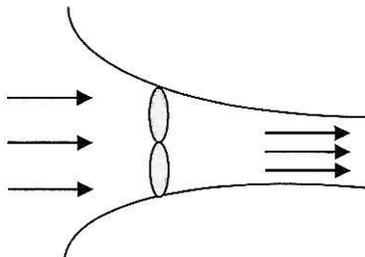
### Mécanique des fluides 1 DD 5.1 mfA1

Un réservoir de véhicule de pompiers de longueur  $L = 95$  cm selon  $Ox$  et de hauteur  $H = 80$  cm selon  $Oz$  est rempli jusqu'à une hauteur  $h = 65$  cm. La pression à la surface est maintenue à la pression atmosphérique  $P_0 = 10^5$  Pa et l'eau a une masse volumique  $\mu = 10^3$  kg.m<sup>-3</sup> supposée constante.

1. Donner l'équivalent volumique des forces de pression. Retrouver l'équation de la statique des fluides et en déduire  $P(z)$ .
2. Calculer la force de pression s'exerçant sur la face latérale. Faire l'application numérique et commenter.
3. Le camion démarre avec une accélération  $\vec{a} = a_0 \vec{e}_x$ . Déterminer l'équation  $z(x)$  de la surface libre.
4. Le camion est arrêté, on le vide par une ouverture en  $z = 0$  de diamètre  $d_1 = 3,1$  cm sur laquelle on fixe la lance à incendie. Celle-ci se termine par un embout conique dont la sortie est de diamètre  $d_2 = 1,9$  cm. Une pompe fournissant une puissance  $P = 1,3$  kW permet d'obtenir un débit de volume  $D_v = 3$  L.s<sup>-1</sup> lorsque l'embout est à une altitude  $Z > 0$ . Calculer  $v_1$ , la vitesse du fluide à la sortie de la pompe et  $v_2$  celle à la sortie de l'embout. Quelle est la hauteur  $Z$  atteinte par l'eau ?

### Mécanique des fluides 2 DD 21.1 mfA5

On dispose d'un ventilateur de section variable dont le diamètre d'entrée est  $d_e$  et le diamètre de sortie est  $d_s$ . L'air, qui est assimilé à un fluide incompressible, de masse volumique  $\mu$ , rentre dans le ventilateur avec une vitesse  $v_e$  et ressort avec une vitesse  $v_s \gg v_e$ . La pression extérieure est uniforme et égale à la pression atmosphérique  $P_0$ . On note  $d$  le diamètre de l'hélice.



1. Montrer que le champ des vitesses est continu au niveau de l'hélice.
2. Déterminer la discontinuité  $\Delta P$  du champ de pression de part et d'autre de l'hélice.
3. Déterminer la résultante des forces  $\vec{F}$  exercée par l'hélice sur l'air.
4. Calculer la puissance utile  $\mathcal{P}$  fournie par le ventilateur par deux méthodes.