1 Ensembles, applications, combinatoire

On commence bien sûr par relire son cours de première année (ou à tout le moins le document de révision présent sur cahier-de-prepa) sur ce sujet, ainsi que la première partie du cours de probabilités. Il convient de maîtriser :

- la démonstration d'égalité entre ensembles (double inclusion a priori, à moins qu'il soit connu que les deux ensembles sont finis et de même cardinal)
- la notion d'injectivité, surjectivité
- l'image directe et réciproque d'une partie par une application. Tout particulièrement savoir interpréter des assertions telles que $y \in f[A]$, ou $x \in f^{-1}[B]$.
- La définition d'un ensemble fini, et au moins un moyen de montrer qu'un ensemble ne l'est pas (être capable de construire une injection de E dans E qui n'est pas surjective, exhiber une suite d'éléments de E formée d'éléments deux à deux distincts)
- Connaître les cardinaux de l'ensemble des parties d'un ensemble fini, de l'ensemble des applications d'un ensemble fini dans un autre ensemble fini, des applications injectives, voire des bijections d'un ensemble dans un autre, des combinaisons de p éléments d'un ensemble fini…
- A connaître aussi, quelques relations sur les combinaisons (relation de Pascal, relation entre $\binom{n}{p}$ et $\binom{n-1}{p-1}$, formule du binôme).

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, combien y a-t-il d'applications $f\colon \{1, \cdots, n\} \rightarrow \{1, \cdots, n\}$ telles que $f \circ f = f$? (déplier pour la réponse non justifiée, qui peut aider à trouver une stratégie)

Exercice 2. Soit n, m, p des entiers naturels, montrer que $\binom{n+m}{p} = \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k} \times \binom{m}{p-k}$

Solution. C'est une identité de Vandermonde. Le plus élégant est d'en donner une interprétation combinatoire : étant donné deux ensembles finis disjoints E et F de cardinaux respectifs n et m, alors une combinaison de p éléments de $E \cup F$ s'obtient en réunissant une combinaison de k éléments de E et une combinaison de $p-k$ éléments de F (pour $0 \leqslant k \leqslant p$) et on découpe donc en paquets disjoints l'ensemble des combinaisons de p éléments de $E \cup F$.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer la somme $\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k}$.

2 Nombres complexes, trigonométrie

Bien relire le document de révision du cours de première année et en traiter les exercices

3 Polynômes

Ne pas tomber dans le piège : $\mathbb{K}_n[X]$ est formé des polynômes de degré au plus n (et pas seulement des polynômes de degré n, lesquels ne constituent d'ailleurs pas un espace vectoriel), et sa dimension vaut $n+1$.

Si on connaît de $\mathbb{K}_n[X]$ la base dite canonique : $(1, X, X^2, \cdots, X^n)$, toute famille de polynômes $(P_0, \cdots, P_n)$ telle que pour tout k, $d(P_k) = k$ en constitue aussi une base (on cite le théorème des degrés étagés, ou, si l'on préfère, échelonnés).

Bien maîtriser :

- le degré d'un polynôme, d'une somme ou d'un produit de polynômes. Quand on somme deux polynômes de même degré n, on sait que le degré du polynôme somme est au plus égal à n. Pour en savoir plus, on regarde le coefficient selon X^n du polynôme somme, et s'il est nul on regarde alors le coefficient selon X^{n-1} et ainsi de suite jusqu'à tomber sur un coefficient non nul.
- La définition d'une racine et sa caractérisation, et la même chose pour les racines multiples. (α racine de P ssi $P(\alpha) = 0$ ssi $X - \alpha$ divise P, α racine de P de multiplicité m ssi $P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0$ mais $P^{(m)}(\alpha) \neq 0$ ssi $(X - \alpha)^m$ divise P mais $(X - \alpha)^{m+1}$ ne divise pas P…
- Les relations entre coefficients et racines d'un polynôme scindé : si $P(X) = a_n (X - x_1) \cdots (X - x_n) = a_n X^n + \cdots + a_0$ alors $\sum x_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$ et $\prod x_k = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$.

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}$, décomposer en produit de facteurs irréductibles réels $X^{2n} - 1$ et $X^{2n} + 1$

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}$, déterminer les racines de $P = (X - 1)^{2n+1} - 1$.

En déduire $\prod_{k=0}^{2n} \cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$

Exercice 6. (Lagrange) Soit $(x_0, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $x_0 < \cdots < x_n$, et pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ on pose $L_k(X) = \prod_{0 \leqslant j \leqslant n, j \neq k} \frac{X - x}{x_k - x_l}$.
Etant donné $p \in [\![0, n+1]\!]$, calculer $\sum_{j=0}^{n} x_j^p L_j$

Exercice 7. Polynômes stabilisant $\mathbb{Z}$: l'objet de cet exercice est de déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.
On note $\delta : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ qui à P associe $P(X+1) - P(X)$.

1. Montrer que, étant donné $n \in \mathbb{N}$, δ induit un endomorphisme δ_n de $\mathbb{R}_n[X]$. En préciser l'image et le noyau.
   Indiquer alors l'image et le noyau de δ.
2. Montrer l'existence et l'unicité d'une base $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ tel que $H_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\delta(H_{n+1}) = H_n$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $H_n(0) = 0$.
3. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, montrer que $P = \sum_{n=0}^{+\infty} \delta^k(P)(0)\, H_k$.
4. Montrer qu'étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n(X) = \frac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!}$ puis justifier que $H_n(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.
5. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, montrer que P stabilise $\mathbb{Z}$ si et seulement si les coordonnées de P selon (H_n) sont toutes entières.

Exercice 8. (Tchebychev)

1. Justifier l'existence et l'unicité de $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.
2. Indiquer le degré de T_n, son coefficient dominant, et justifier que T_n admet n racines distinctes, toutes dans $[-1, 1]$.
3. Montrer que pour tout n, $T_{n+2} = 2\,X\,T_{n+1} - T_n$

4 Intégration sur un intervalle quelconque

Bien maîtriser déjà l'intégrabilité des fonctions de référence :

- $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ en 0^+, laquelle est intégrable si et seulement si $\alpha < 1$ (par extension, $t \mapsto \frac{1}{|t - t_0|^\alpha}$ est intégrable en t_0^- ou t_0^+ si et seulement si $\alpha < 1$)
- $t \mapsto \frac{1}{t^a}$ en $+\infty$, laquelle est intégrable si et seulement si $\alpha > 1$
- $t \mapsto \exp(-\alpha\, t)$ laquelle est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 0$.
- $t \mapsto \ln t$ que l'on sait intégrable en 0.

Il est essentiel de savoir justifier la convergence d'une intégrale. Le plus souvent, on montre en fait la convergence absolue (ce qui revient à l'intégrabilité de la fonction sous le signe d'intégration). Je rappelle les grandes lignes : noter déjà la régularité de la fonction sous le signe somme (la continuité, ou la continuité par morceaux) en ouvrant l'intervalle là où c'est nécessaire. On voit alors où l'intégrale est généralisée, et ensuite bien sûr, on montre la convergence de l'intégrale à la ou les bornes où la question se pose.

Exercice 9. Soit $I = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 - x^3)^{1/3}}$

1. Justifier l'existence de I.
2. A l'aide du changement de variable $x = \frac{1}{1+t^3}$ que l'on justifiera, montrer que $I = \int_0^{+\infty} \frac{3\,t}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$.
3. A l'aide du changement de variable $s = \frac{1}{t}$, montrer que $I = 3\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}s}{1+s^3}$
4. En déduire que $I = \frac{3}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2 - u + 1}$ et calculer I.

Exercice 10. Etudier la convergence des intégrales $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$ et de $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$.

Exercice 11. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ intégrable et soient $0 < a < b$. Montrer que $I = \int_0^{+\infty} \frac{f(a\,x) - f(b\,x)}{x}\,\mathrm{d}x$ converge et en déterminer la valeur.