Révisions sur les suites

- Recherche de limites et d'équivalents, utilisation des développements limités. Recherche de la limite de suites de la forme $(1+u_n)^{v_n}$ avec $u_n \to 0$.
- Théorème de la limite monotone.
- Utilisation des inégalités (limite par encadrement, etc.)
- Suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Suites définies implicitement.
- Sommes de Riemann.
- Suites arithmético-géométrique (méthode à connaître) – Formulaire pour les suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

La **formule de Stirling** a été vue (et démontrée), elle doit être connue (mais pas la démonstration).

Révisions sur les séries numériques

- **Séries de référence** : séries géométriques ; séries télescopiques ; séries de Riemann ; série exponentielle ; $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$.
  L'équivalent $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ est connu (et on sait aussi répondre à la question : "comment se démontre cet équivalent" ?) Savoir également montrer que $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ a une limite finie (positive, γ constante d'Euler).
- Expression du terme général en fonction des sommes partielles.
  Si une série converge, son terme général tend vers 0, réciproque fausse. Divergence grossière.
  Si une série converge, alors la suite des restes est bien définie et converge vers 0. Relation entre reste, somme partielle et somme infinie de la série ; expression du terme général en fonction des restes.
- Nature de $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ en fonction de la nature de $\sum u_n$ et de $\sum v_n$.
- **Convergence absolue, semi-convergence.** La convergence absolue entraîne la convergence (démonstration non exigible). La réciproque est fausse, ce qui définit la notion de semi-convergence.
  Suite sommable : Suite (réelle ou complexe) dont la série est absolument convergente. Pour une suite à termes réels de signes constants, la sommabilité est équivalente à la convergence (qui est équivalente à la CVA) de la série.
  Pour une suite réelle quelconque, ou complexe, la sommabilité implique la convergence de la série (réciproque fausse : la convergence, n'implique pas en général la CVA).
  Pas plus de détails sur les familles sommables pour l'instant (c'est seulement du vocabulaire).
- Pour une série à termes positifs, la suite des sommes partielles est croissante. Si la série à termes positifs converge, la suite des restes est décroissante.

- **Théorèmes de comparaisons** : Si $\sum v_n$ est une série <u>à termes positifs</u>.
  (i) Si $|u_n| \leqslant v_n$ pour tout n (ou à partir d'un certain rang), et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge (et même converge absolument, la suite (u_n) est sommable).
  (ii) Si $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ pour tout n (ou APCR), et si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.
  (iii) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors (u_n) est positive au moins à partir d'un certain rang et les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.
  (iv) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$, ou $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge absolument, donc converge.
  Avec ce type de comparaison, si $\sum |u_n|$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge (ne pas oublier le module, ou la valeur absolue, pour u_n lorsqu'elle n'est pas de signe constant).

- **Règle de d'Alembert** :
  (i) Soit (u_n) tq $u_n > 0$ à partir d'un certain rang et $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. Si $\ell > 1$, la série $\sum u_n$ diverge grossièrement ; si $\ell < 1$, la série converge. Le cas $\ell = 1$ est indéterminé.
  (ii) Si (v_n) ne s'annule jamais (au moins APCR), on peut appliquer la règle sur $|v_n|$ ce qui conduit à la divergence grossière encore, ou à la convergence absolue.

- **Théorème des séries alternées.**
  Lorsque (a_n) décroît et converge vers 0, la série $\sum(-1)^n a_n$ converge, sa somme est comprise entre deux sommes partielles de rangs consécutifs ; pour tout $n \in \mathbb{N}$, le reste R_n est du signe de $(-1)^{n+1}a_{n+1}$ et $|R_n| \leqslant a_{n+1}$.
  Énoncé analogue pour $\sum(-1)^{n+1}a_n$.

- Comparaison série-intégrale : **méthode** revue sur des exemples, pas de résultat général à connaître.

- Produit de Cauchy. (démonstration non exigible).
  Définition : $w_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$ est le terme général du produit de Cauchy des séries $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$.
  Théorème : Si $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ convergent absolument, alors $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} w_n$ converge absolument, donc converge, et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \times \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$. *Démonstration non exigible.*