Révisions et compléments sur les fonctions réelles et les intégrales sur un segment .

- Fonctions usuelles, développements limités, primitives usuelles.
- Fonctions continues par morceaux sur un segment, intégration sur un segment, propriétés de l'intégrale des fonctions cpm sur un segment : linéarité, positivité, inégalités triangulaire et de Cauchy-Schwarz. Stricte positivité de l'intégrale d'une fonction **continue**, positive et non identiquement nulle.
- **Théorème fondamental de l'Analyse**.
- Formule de Taylor avec reste intégral.

Intégrales généralisées.

- Définition de la convergence (ou divergence) d'une intégrale de fonction continue par morceaux sur un intervalle I quelconque.
- Linéarité de l'intégrale, positivité. **Stricte positivité pour les fonctions continues**.
- Intégration par parties. Changement de variable. Application au cas des fonctions paires ou impaires (dont l'intégrale converge !) sur $]-a,a[$.
  L'intégration par parties s'écrit directement sur l'intervalle quelconque et on vérifie que "le crochet converge" ; dans ce cas les deux intégrales généralisées sont de même nature.
  Le changement de variable s'écrit directement sur l'intervalle quelconque et conserve la nature des intégrales généralisées. Pour les cas usuels et simples, on ne demande pas d'écrire que la fonction changement de variable est de classe $\mathcal{C}^1$ et bijective, mais il convient de vérifier au brouillon qu'on a bien quelque chose de bijectif ! (Attention aux changements de bornes).

- Si f est positive sur $I=[a,b[$ (resp. $]a,b]$), alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge ssi $x\mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est majorée (resp. $x\mapsto \displaystyle\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$ est majorée) car cette fonction est croissante sur I (resp. décroissante).
- Intégrale *absolument convergente*. La convergence absolue entraîne la convergence. La réciproque est fausse ; l'intégrale de Dirichlet $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ a été citée comme cas d'intégrale semi-convergente, mais l'étude détaillée d'intégrales semi-convergentes n'est pas un objectif du programme.
- Une fonction f continue par morceaux sur I est dite **intégrable** sur I lorsque l'intégrale de f sur I est absolument convergente. *On peut dire également "intégrable en a" (ou en b) lorsque $I=]a,b]$ (ou lorsque $I=[a,b[$).*

- *Théorème de comparaison* pour étudier l'intégrabilité :
  (i) Si f et g sont continues par morceaux sur I, avec $|f|\leqslant|g|$ sur I, alors :
  (g intégrable sur I) $\Rightarrow$ (f intégrable sur I) (donc f non intégrable $\Rightarrow$ g non intégrable).
  (ii) Si f et g sont continues par morceaux sur $I=[a,b[$ et si $f=\mathcal{O}(g)$ ou $f=o(g)$ en b, alors
  (g intégrable sur I) $\Rightarrow$ (f intégrable sur I) (donc f non intégrable $\Rightarrow$ g non intégrable).
  (Analogue pour $I=]a,b]$).
  (iii) Si f et g sont cpm sur $I=[a,b[$ et si $f\sim g$ en b, alors f intégrable $\Leftrightarrow$ g intégrable.
  (Analogue pour $I=]a,b]$).

- *Fonctions intégrables de référence, intégrales de référence* :
  (a) $x\mapsto\dfrac{1}{x^\alpha}$ intégrable sur $[1,+\infty[$ ssi $\alpha>1$, intégrable sur $]0,1]$ ssi $\alpha<1$;
  $t\mapsto\dfrac{1}{(t-a)^\alpha}$ en a, ou $t\mapsto\dfrac{1}{(b-t)^\alpha}$ en b ssi $\alpha<1$ (a ou b sont des bornes finies) ;
  $x\mapsto e^{-\lambda x}$ sur $[0,+\infty[$ ssi $\lambda>0$, valeur à connaître (sans refaire un calcul à chaque fois)
  $$\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}\mathrm{d}t=\frac{1}{\lambda}\text{ si }\lambda>0.$$
  $x\mapsto\ln(x)$ sur $]0,1]$; $x\mapsto\dfrac{1}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$.
  (b) Une fonction continue sur $]a,b]$ (a borne finie) et prolongeable par continuité en a est intégrable sur $]a,b]$. Analogue pour $[a,b[$ avec b fini.
  (c) $t\mapsto e^{-t^2/2}$ et $t\mapsto e^{-t^2}$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$ (justifié avec théorème de comparaison). Les valeurs

des intégrales (sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{R}^+$) sont à connaître. On peut en connaître une et retrouver les autres par changement de variable ou par parité.

Exemples classiques à savoir traiter :

(a) Intégrabilité ou non, en 0 et en $+\infty$, des fonctions de Bertrand $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha \ln^\beta(t)}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ selon α et β ; intégrabilité en 1 (lorsque $\beta > 0$.
Le résultat général n'est pas à connaître, et ne peut pas être utilisé directement. Toute fonction de ce type est à traiter comme un exercice, l'intégrabilité doit être justifiée.

(b) Intégrabilité sur $\mathbb{R}^+$ des fonctions de la forme $t \mapsto \cos(\beta t)e^{-\alpha t}$ et $t \mapsto \sin(\beta t)e^{-\alpha t}$ lorsque $\alpha > 0$. Savoir calculer les valeurs des intégrales sur $\mathbb{R}^+$, en passant par $t \mapsto e^{(i\beta-\alpha)t}$ ou avec des I.P.P.

(c) Convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$.
Il faut connaître $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ comme exemple de fonction non intégrable sur $]0, +\infty[$ (dont l'intégrale est semi-convergente), mais la justification de la non intégrabilité n'est pas exigible.

— Espace vectoriel des fonctions intégrables sur I. L'ensemble des fonctions de carré intégrable n'est plus cité dans le programme...
— Comparaison série-intégrale (révision).